PRAKTISCHE INFORMATIK IV
rechnernetze & multimediatechnik

Seminar Panoramabilder: Affine und Projektive Modelle

16.04.2008

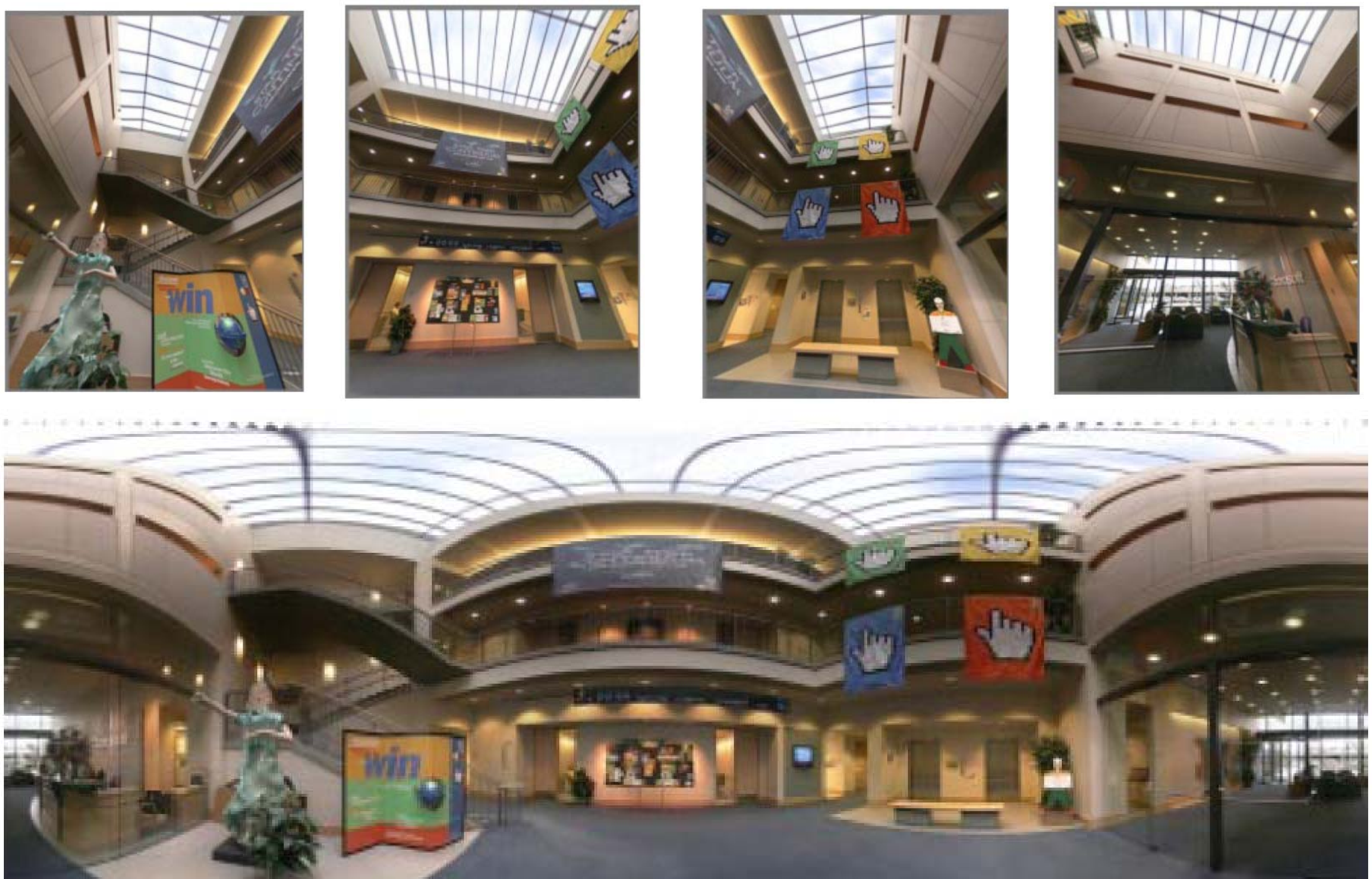
Samir Chaturvedi
Fakultät für Praktische Informatik IV

Gliederung

- Motivation
- Euklidischer Raum
- Projektiver Raum
- Affiner Raum
- Homogene Koordinaten
- Affine Transformation
- Affine Modelle
- Projektive Modelle
- Zusammenfassung

Motivation

- Zusammensetzen von verschiedenen Bildern mit unterschiedlichen Perspektiven.



Quelle: Heung-Yeung Shum and Richard Szeliski– Panoramic Image Mosaics Seite 34,35

Euklidischer Raum

Der Raum der menschlichen Intuition

- Als Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Skalarprodukt
- Als euklidischer Vektorraum
- Als euklidischer Punktraum

Zweidimensionaler euklidischer Raum → euklidische Ebene

Projektiver Raum und Projektive Ebene

Projektiver Raum

- Gegeben: reeller Vektorraum V($\mathbb{R}^3$)
- Menge aller Ursprungsgeraden ist der reelle projektive Raum P(V)

Projektive Ebene

- Punkte und Geraden mit zwei Vorraussetzungen:

1. Je zwei Geraden haben einen eindeutigen Schnittpunkt.
2. Je zwei Punkte besitzen eine Verbindungsgerade.

Affiner Raum

- Liegt zwischen euklidischem und projektivem Raum.
- Er läßt sich in den projektiven Raum einbetten.

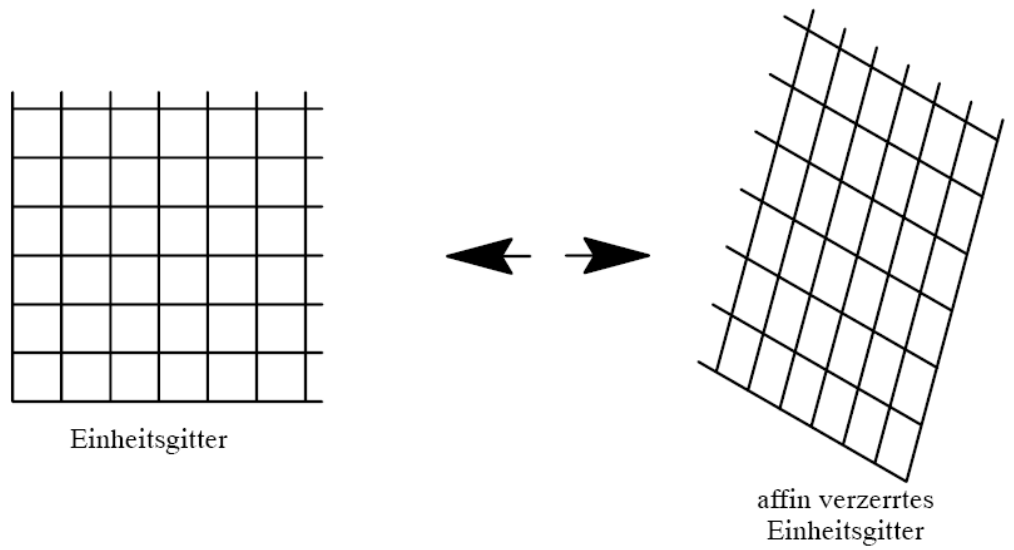
Er besteht aus:

- Menge von Punkten
- Menge von Geraden
- Einer Relation die angibt, welche Punkte auf welchen Geraden liegen.
- Einer Relation die angibt, welche Geraden parallel sind.

Affine Transformation

Es ist eine Mischung der folgenden Operationen:

- Verschiebung (Translation)
- Drehung (Rotation)
- Skalierung (Zoom)
- Scherung



Quelle: Klauer - Raumbezug in Kartographie und GIS - Seite 75

Homogene Koordinaten

- Mehrere aufeinander folgende Transformationen ergeben eine Mischung von Matrizenmultiplikationen und –additionen
- Besser:
  - nur Matrizenmultiplikation
  - Transformationsmatrix nur einmal berechnen (für viele Punkte)
- Statt n Koordinaten werden n+1 Koordinaten verwende:

$$(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow (x_1, \ldots, x_n, 1)$$

- Rückwandlung in euklidische Koordinaten

$$(x_1, \ldots, x_n, w) \rightarrow (\frac{x_1}{w}, \ldots, \frac{x_n}{w})$$

Affine Transformation

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}}_{\mathrm{A}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}}_{\mathrm{t}}$$

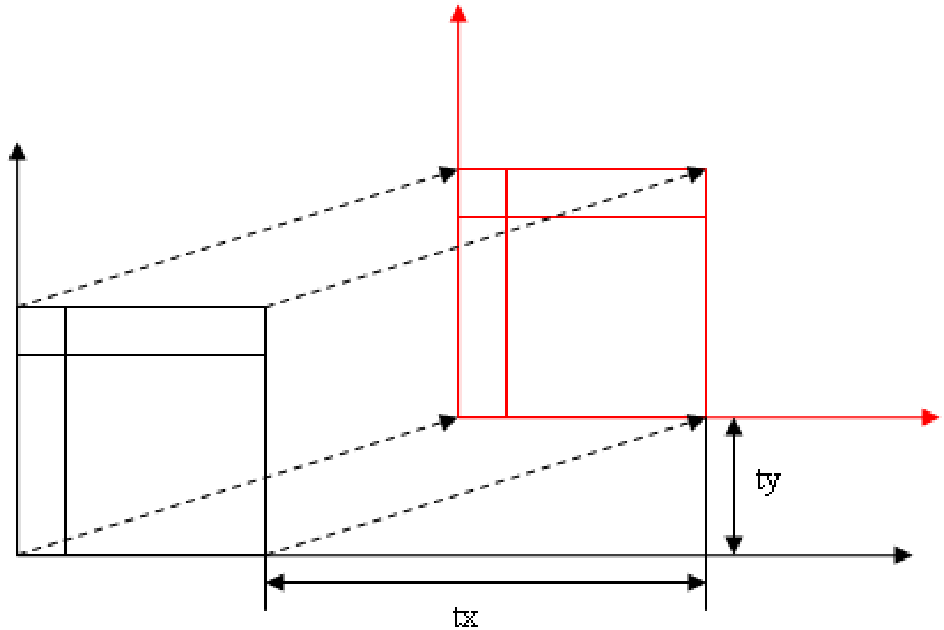
- Matrix **A** enthält die Operationen Rotation, Skalierung, Scherung; Vektor **t** beschreibt die Verschiebung
- Verschiebungsvektor **t** in Matrix **A** integrieren

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & t_x \\ a_{10} & a_{11} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verschiebung (Translation)

$$x' = x + t_x$$
$$y' = y + t_y$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix}$$



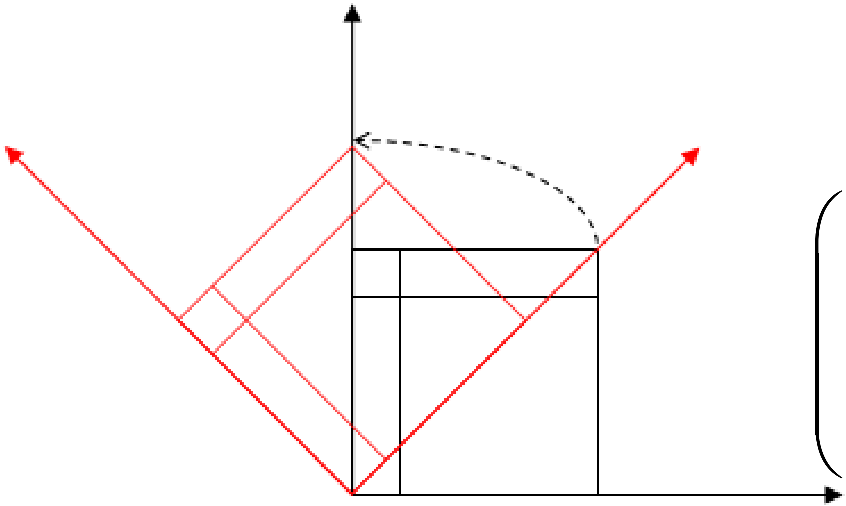
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drehung (Rotation)

$$x = r.\cos(\mu) \qquad x' = r.\cos(\mu+\alpha) = x.\cos(\alpha) - y\sin(\alpha)$$

$$y = r.\sin(\mu) \qquad y' = r.\sin(\mu+\alpha) = x.\sin(\alpha) + y\cos(\alpha)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung (Zoom)

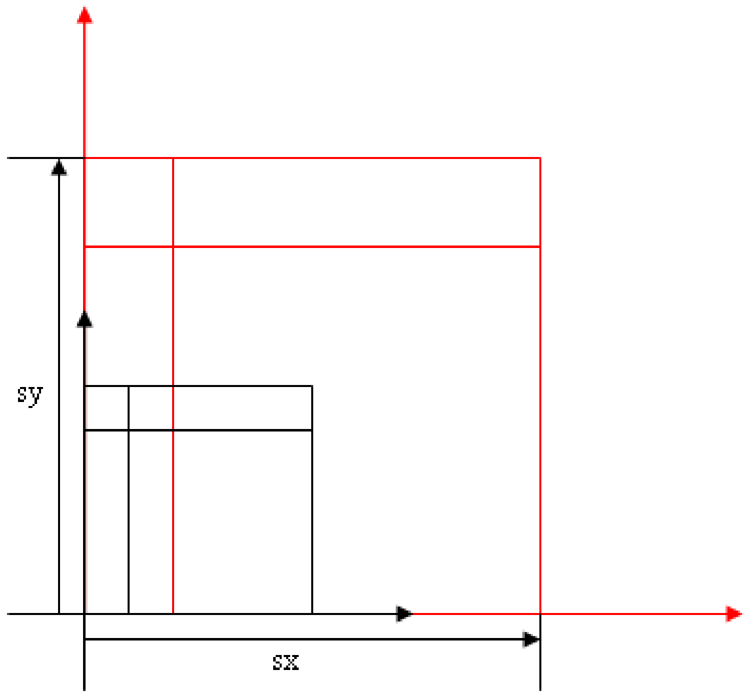
$s_x = s_y > 0$ Vergrößern

$s_x = s_y < 0$ Verkleinern

$s_x \neq s_y$ Verzerrung

(Keine gültige Kameraoperation)

$$x' = x.s_x$$
$$y' = y.s_y$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

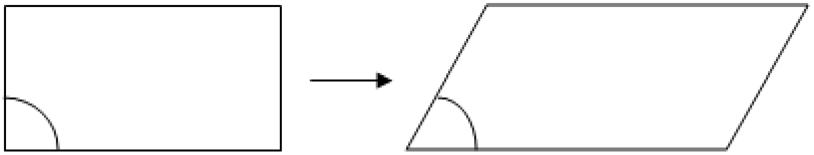
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scherung

$$x' = x + y.\mathrm{k}$$

$$y' = y + x.\mathrm{k}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{k} & 0 \\ \mathrm{k} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Keine gültige Kameraoperation

Affines Modell

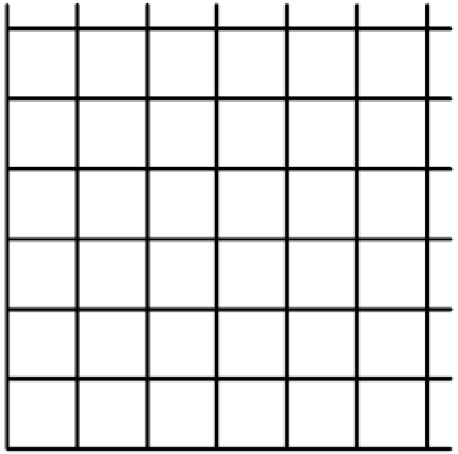
- Affine Transformation hat 6 Parameter
- Einschränkung:
  - Scherung verbieten. (k=0)
  - Nur isotrope Skalierung erlauben ($s = s_x = s_y$)
- Dann bleiben nur 4 Parameter übrig
  - Einer für Rotation (α : Winkel der Rotation)
  - Einer für isotrope Skalierung (s :isotroper Skalierungsfaktor)
  - Zwei für die Verschiebungsvektoren

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s\cos\alpha & s\sin\alpha & t_x \\ -s\sin\alpha & s\cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

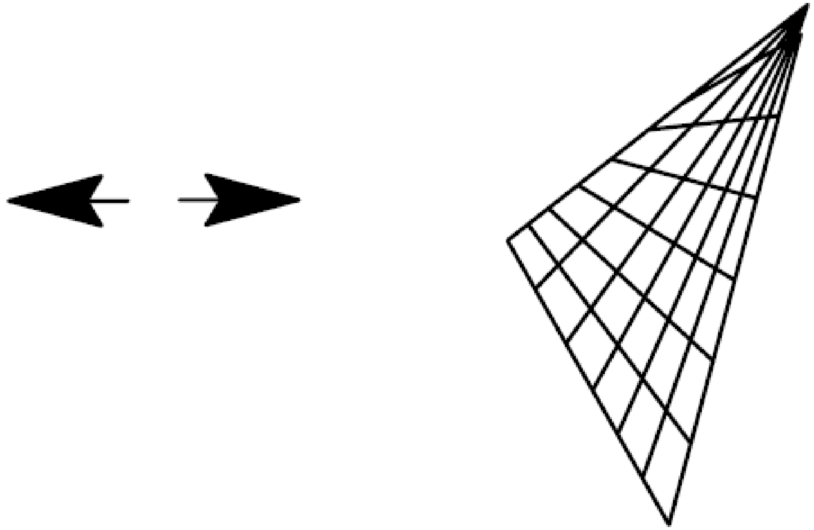
Projektives Modell (1)

- Allgemeine Form:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix}$$



Einheitsgitter



projektiv verzerrtes Einheitsgitter

Quelle: Klauer - Raumbezug in Kartographie und GIS - Seite 78

Projektives Modell (2)

- Ergebnis nach ausmultiplizieren:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} \\ h_{10} & h_{11} & h_{12} \\ h_{20} & h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} h_{00}x + h_{01}y + h_{02} \\ h_{10}x + h_{11}y + h_{12} \\ h_{20}x + h_{21}y + h_{22} \end{bmatrix}$$

- Rückwandeln in euklidische Koordianten: $w = w'$

$$(x_1, \ldots, x_n, w) \rightarrow (\frac{x_1}{w}, \ldots, \frac{x_n}{w})$$

$$x' = \frac{h_{00}x + h_{01}y + h_{02}}{h_{20}x + h_{21}y + h_{22}} \qquad y' = \frac{h_{10}x + h_{11}y + h_{12}}{h_{20}x + h_{21}y + h_{22}}$$

Projektive Modell (3)

- Zähler und Nenner durch h_{22} teilen. $b_{ik} = \frac{h_{ik}}{h_{22}}$

$$x' = \frac{b_{00}x + b_{01}y + b_{02}}{b_{20}x + b_{21}y + 1} \qquad y' = \frac{b_{10}x + b_{11}y + b_{12}}{b_{20}x + b_{21}y + 1}$$

$$\begin{bmatrix} s\cos\alpha & s\sin\alpha & t_x \\ -s\sin\alpha & s\cos\alpha & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{20} & b_{21} & 1 \end{bmatrix}$$

- Unterschied zu affinem Modell: $b_{20} = b_{21} = 0$

$$x' = b_{00}x + b_{01}y + b_{02} \qquad y' = b_{10}x + b_{11}y + b_{12}$$

Beispiele

Applet

- Affines Modell
- Projektives Modell

$$a_1 = b_{00}$$

$$b_1 = b_{01}$$

$$c_1 = b_{02}$$

$$a_2 = b_{10}$$

$$b_2 = b_{11}$$

$$c_2 = b_{12}$$

$$a_3 = b_{20}$$

$$b_3 = b_{21}$$

Zusammenfassung

- Beschreibung affiner und projektiver Räume
- Definition und Verwendung von homogenen Koordinaten
- Darstellung der unterschiedliche Transformationen
- Beschreibung und Berechnung von affinen Modellen
- Beschreibung und Berechnung von projektiven Modellen
- Beispiele

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

Fragen?

Anhang

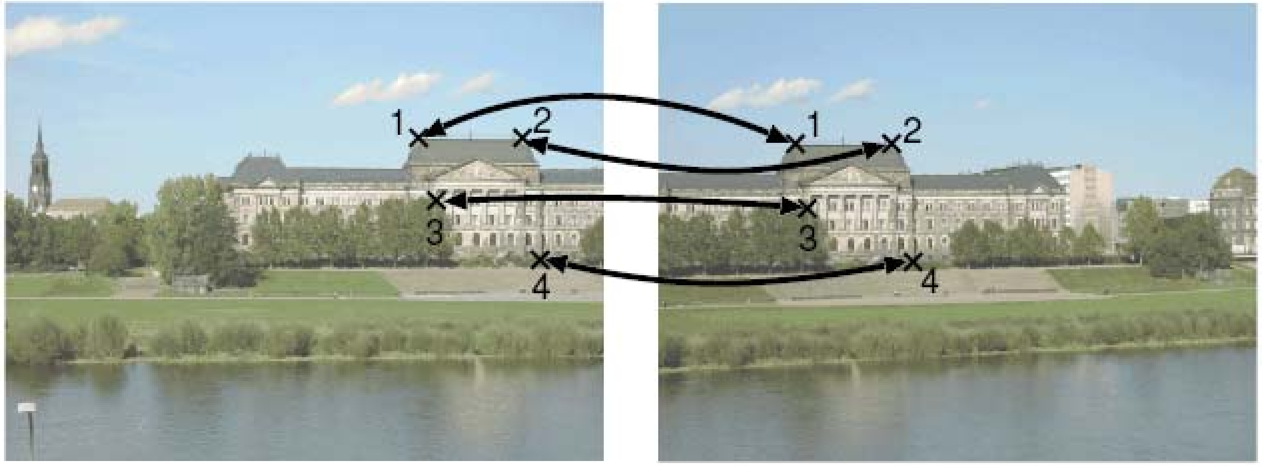
Beispiel

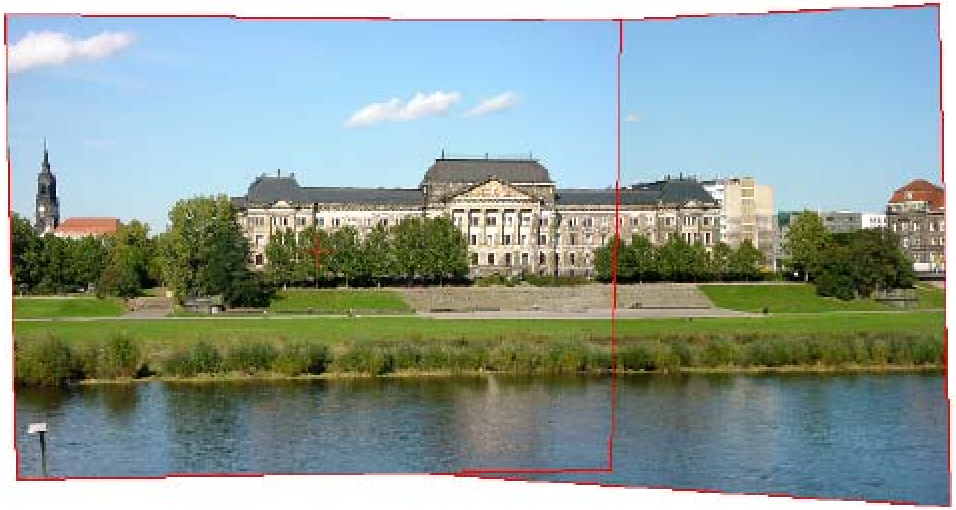
Beispiel

[Panormabild]

[Applet]

Verwendung der projektiven Transformation

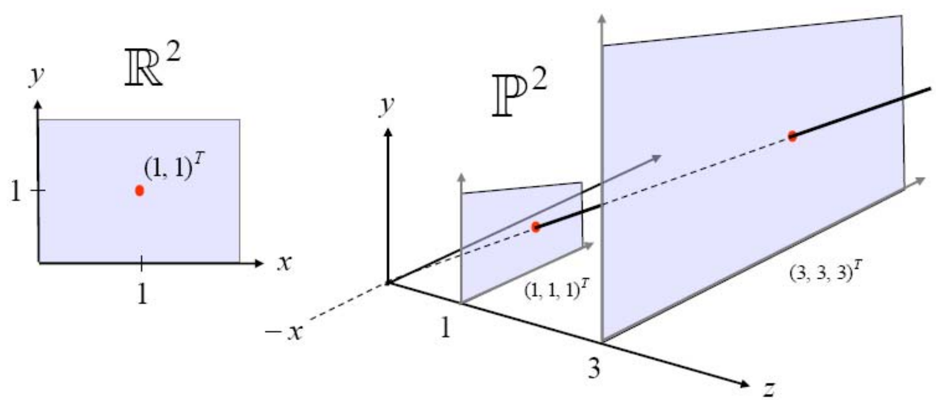




Quelle: Dirk Farin - Autom. Video Segm. Employing Object/Camera Modeling Techn. - Seite 41

Homogene Koordinaten (2)

- Vorteile:
  - Inhomogene Gleichungssysteme werden homogen und können so gelöst werden.
  - Einheitliche Behandlung aller Transformationen
  - Einfache Umkehrung der Transformation durch Matrizeninversion
- Translation, Drehung, Skalierung und Scherung werden zu einer einzigen Transformationsmatrix.
- Für die homogenen Koordinaten gilt:



$$\forall \lambda \neq 0 \quad (x, y, 1)^T \sim (\lambda x, \lambda y, \lambda)^T$$

Quelle: Prof. Dr.-Ing. Andreas Meisel – 3D Bildverarbeitung - Seite 16

Geraden in homogenen Koordinaten

- Eine Gerade in der Ebene: $ax + by + c = 0$
- Parameter der Geraden als Vektor: $\mathrm{l} = (a, b, c)^T$
- Punkt p in homogenen Koordinaten: $\mathrm{p} = (x, y, 1)^T$

- Geradengleichung lautet: $\mathrm{p}^T \mathrm{l} = 0$

- Resultat:

1. Alle Punkte **p** liegen auf Gerade **l**
2. Alle Geraden **l** gehen durch den Punkt **p**

Horizontlinie

- Diese schneiden sich in einem Fluchpunkt.
- Horizont: Menge der Fluchpunkte wird Fluchtlinie genannt .

- Punkte auf den Horizont :

$$(h_{20}, h_{21}, h_{22}).p = 0$$

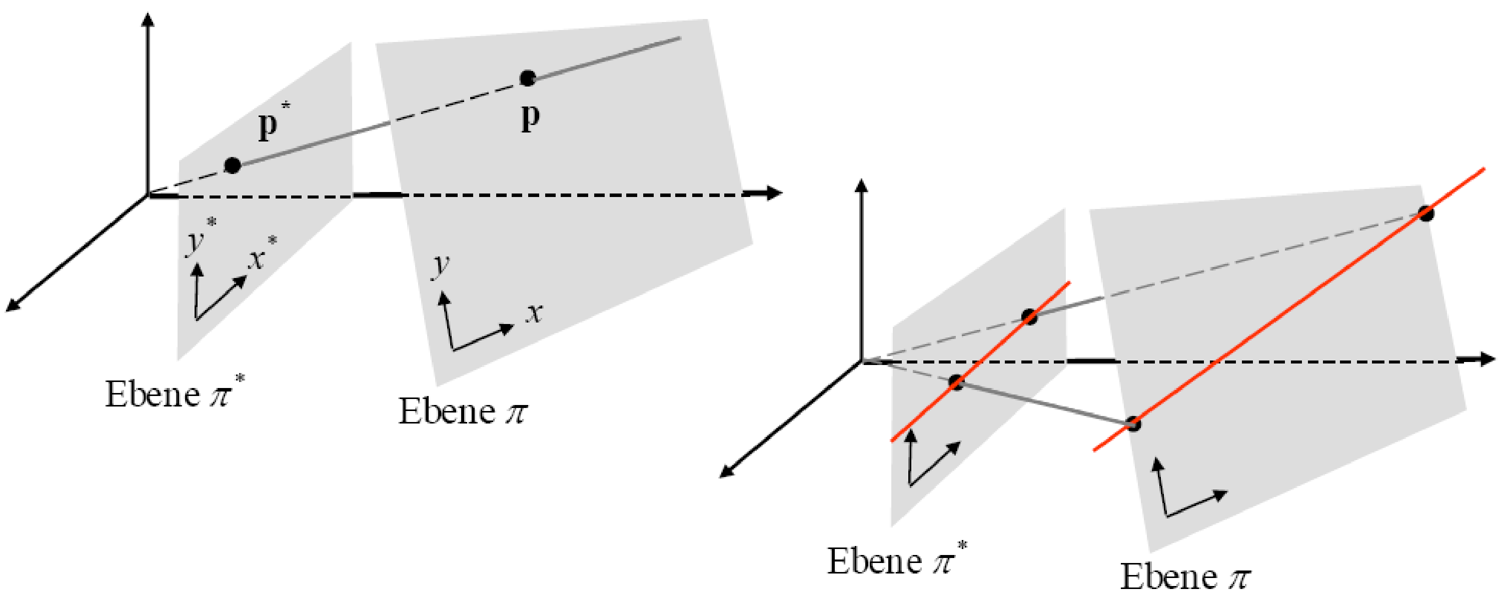
- Gleiche Form wie allgemeine Liniengleichung
- Betrachte letzte Zeile in Matrix **H**

  und Linienparameter der Horizontalen Linie:

$$\mathrm{l}_{\mathrm{h}} = (h_{20}, h_{21}, h_{22})^{\mathrm{T}}$$

Projektion in 2D

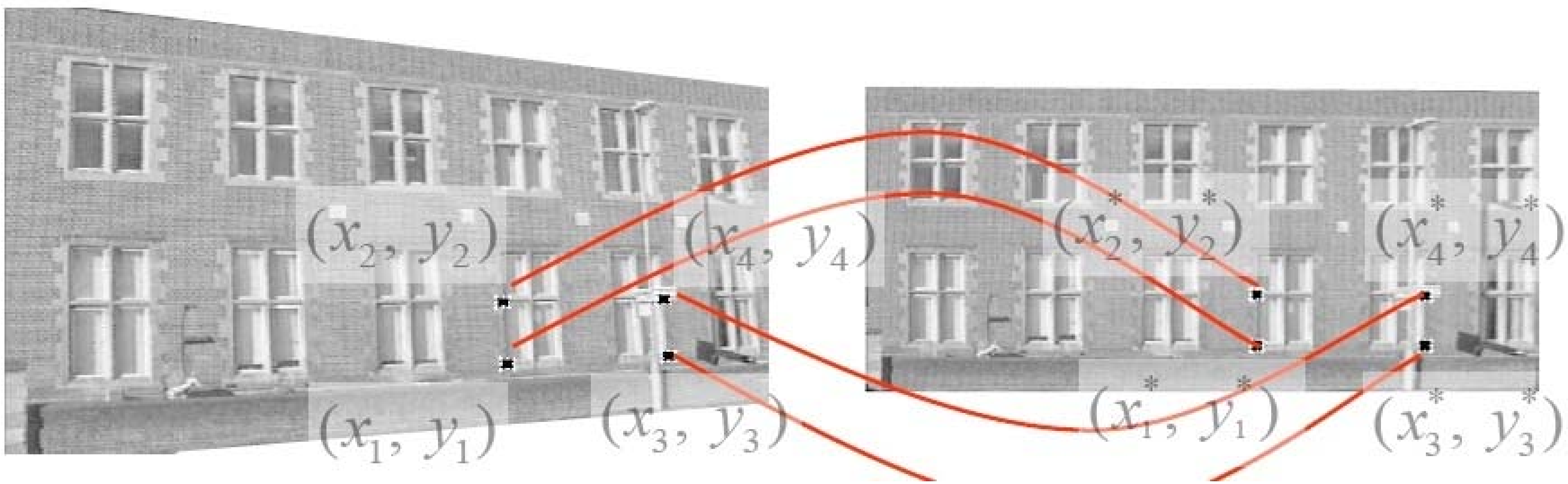
- Eine Projektion ist eine umkehrbare Abbildung h von Punkten in $\mathbb{P}^2$ auf Punkte in $\mathbb{P}^2$. $h:\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$
- n Punkten die vor der Projektion auf einer Gerade liegen, liegen auch nach der Projektion auf einer Gerade



Quelle: Prof. Dr.-Ing. Andreas Meisel – 3D Bildverarbeitung - Seite 32

Projektives Modell

- Korrespondierende Punkte bestimmen



Projektives Modell

- Man braucht mindestens 4 identische Punkte, wobei drei einer Geraden angehören dürfen.

$$x_k' = b_{00}x_k + b_{01}y_k + b_{02} - b_{20}x_k'x_k - b_{21}x_k'y_k$$

$$y_k' = b_{10}x_k + b_{11}y_k + b_{12} - b_{20}y_k'x_k - b_{21}y_k'y_k$$

$$k = 1 \ldots n$$

Projektives Modell

$$x'(b_{20}x + b_{21}y + 1) = b_{00}x + b_{01}y + b_{02}$$
$$y'(b_{20}x + b_{21}y + 1) = b_{10}x + b_{11}y + b_{12}$$

$$x' = b_{00}x + b_{01}y + b_{02} - b_{20}x'x - b_{21}x'y$$
$$y' = b_{10}x + b_{11}y + b_{12} - b_{20}y'x - b_{21}y'y$$

Projektives Modell

- Lösungsgleichung mit 8 Parametern:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_1 x_1 & -x'_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & x_1 & y_1 & 1 & -y'_1 x_1 & -y'_1 y_1 \\ \ldots & & & & & & & \\ x_n & y_n & 1 & 0 & 0 & 0 & -x'_n x_n & -x'_n y_n \\ 0 & 0 & 0 & x_n & y_n & 1 & -y'_n x_n & -y'_n y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{00} \\ b_{01} \\ b_{02} \\ b_{10} \\ b_{11} \\ b_{12} \\ b_{20} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \\ \ldots \\ x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$$