4. Exkurs: Einführung in die Logik

4.1 Einführung in die Logik

Motivation

"Es wird dann beim Auftreten von Streitfragen für zwei Philosophen nicht mehr Aufwand an wissenschaftlichem Gespräch erforderlich sein als für zwei Rechnerfachleute. Es wird genügen, Schreibzeug zur Hand zu nehmen, sich vor das Rechengerät zu setzen und zueinander (wenn es gefällt, in freundschaftlichem Ton) zu sagen: Lasst uns rechnen."

Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646 - 1716)

Aussagenlogik

Einleitendes Beispiel

Eine Person XY stellt folgende Behauptungen auf:

1. Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
2. Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
3. Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in den Urlaub.
4. Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Mannheim.
5. Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
6. In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
7. Es stimmt nicht, dass ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

Frage: Fährt XY nach Spanien?

Formalisierung des Beispiels (1)

A := 'XY hat genug Geld gespart'

B := 'XY kauft ein Auto'

C := 'XY kauft ein Fahrrad'

D := 'XY fährt nach Spanien in den Urlaub'

E := 'XY bleibt im Urlaub in Mannheim'

F := 'XY hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht'

G := 'XY hat in diesem Jahr andere Ausgaben'

Formalisierung des Beispiels (2)

1. wenn A, dann B
2. wenn (nicht A), dann C
3. wenn B, dann D
4. wenn C, dann E
5. nicht F
6. nicht G
7. nicht ((nicht A) und (nicht (F oder G)))

Logischer Kalkül

Vorgehensweise

- Definition von **Grundbausteinen** (Operanden und Operatoren)
- Definition von Regeln zur Bildung von **Formeln** aus den Grund-bausteinen

Ein Kalkül ist syntaktisch und semantisch wohl definiert.

In einem Kalkül kann man durch "Rechnen" neue Formeln herleiten, die Gleichheit von Formeln beweisen usw.

Beispiele für logische Kalküle

- Aussagenlogik
- Prädikatenlogik erster Stufe
- Prädikatenlogik zweiter Stufe usw.

Aussagenlogik

Die **Aussagenlogik** behandelt den Wahrheitswert von Aussagen.

Es ist eine **zweiwertige** Logik: Aussagen können nur WAHR oder FALSCH sein. Weitere Werte (z.B. "UNZUTREFFEND", "UNBEKANNT", "MÖG-LICH") können nicht zugewiesen werden.

Übliche Notation der Wahrheitswerte

WAHR	1	L	T	true
FALSCH	0	0	F	false

Die Operatoren der Aussagenlogik

nicht	$\neg$	nicht A	$\neg A$
und	$\wedge$	A und B	$A \wedge B$
oder	$\vee$	A oder B	$A \vee B$
exor	$\oplus$	A oder B, aber nicht beide	$A \oplus B$
wenn, dann	$\rightarrow$	wenn A, dann B	$A \rightarrow B$
genau dann, wenn	$\leftrightarrow$	genau dann A, wenn B	$A \leftrightarrow B$

Die Definition der Operatoren geschieht in Form von **Wertetabellen** für die Wahrheitswerte. Sie legen die **Semantik der Operatoren** fest.

Negation ("nicht")

¬ negiert den Wert des Arguments: ¬ 0 = 1; ¬ 1 = 0

A	¬A
0	1
1	0

Schreibweise in Java: !a

Konjunktion ("und")

$A \wedge B$ ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Schreibweise in Java: a && b

Disjunktion ("oder")

A $\vee$ B ist genau dann wahr, wenn entweder A oder B oder beide wahr sind

A	B	A $\vee$ B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Merke:

Das "oder" ist ein inklusives "oder ": entweder A oder B oder beides.

Beispiel

"Amerikanische Autos sind schlecht oder teuer. "

Schreibweise in Java: a || b

Antivalenz (exklusives Oder, EXOR)

$A \oplus B$ ist genau dann wahr, wenn entweder A oder B wahr ist, aber nicht beide.

Schreibweise: $A \oplus B$, A EXOR B

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$A \oplus B \leftrightarrow (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Schreibweise in Java: a ^ b

Der Tradition der Aussagenlogik folgend werden wir den EXOR-Operator im Folgenden nicht näher behandeln.

Implikation

A $\rightarrow$ B ist genau dann wahr, wenn B wahr oder A falsch ist.

A	B	A $\rightarrow$ B
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Merke:

Wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann die Folgerung wahr oder falsch sein, man weiß es nicht.

"Aus einer falschen Voraussetzung kann alles folgen."

Beispiel für die Implikation

A = "es regnet"

B = "die Straße ist nass„

Wenn es regnet **dann** ist die Straße nass.

es regnet nicht	die Straße ist nicht nass	**WAHR**
es regnet nicht	die Straße ist nass (ein Sprengwagen ist vorbeigekommen)	**WAHR**
es regnet	die Straße ist nicht nass	**FALSCH**
es regnet	die Straße ist nass	**WAHR**

Äquivalenz ("genau dann, wenn") (1)

$A \leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert haben.

A	B	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Entspricht der Gleichheit (=) in der Arithmetik.

Aus A folgt B, und aus B folgt A.

Äquivalenz ("genau dann, wenn") (2)

Beispiel

Genau dann, wenn ich verliebt bin, verschenke ich rote Rosen.

ich bin nicht verliebt	ich verschenke keine roten Rosen	**WAHR**
ich bin nicht verliebt	ich verschenke roten Rosen	**FALSCH**
ich bin verliebt	ich verschenke keine roten Rosen	**FALSCH**
ich bin verliebt	ich verschenke roten Rosen	**WAHR**

Formeln der Aussagenlogik (1)

Die **Konstanten** sind 0 und 1. **Aussagenvariable** stehen als Symbole für atomare Aussagen.

Beispiele

A := 'XY hat genug Geld gespart'

H := 'Es regnet'

I := 'Ich bin verliebt'

Formeln der Aussagenlogik (2)

Regeln für die Bildung von Formeln

- 0 ist eine Formel.
- 1 ist eine Formel.
- Jede Aussagenvariable ist eine Formel.
- Wenn a eine Formel ist, ist $\neg$ a eine Formel.
- Wenn a und b Formeln sind, sind
  $(a \wedge b)$
  $(a \vee b)$
  $(a \rightarrow b)$
  $(a \leftrightarrow b)$ Formeln.
- Wenn a eine Formel ist, ist (a) eine Formel (Klammerung).

Präzedenzregeln

Man definiert Präzedenzregeln zur Vereinfachung der Schreibweise, wie in der Arithmetik:

$\neg$	bindet am stärksten (höchste Priorität)
$\wedge$	hat zweite Priorität
$\vee$	hat dritte Priorität
$\rightarrow$	hat vierte Priorität
$\leftrightarrow$	bindet am schwächsten

Beispiel

$\neg a \vee b \wedge c$ wird interpretiert als $(\neg a) \vee (b \wedge c)$

Formale Beschreibung von Beispiel 1 (1)

1. Wenn ich genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Auto.
2. Wenn ich nicht genug Geld gespart habe, kaufe ich mir ein Fahrrad.
3. Wenn ich ein Auto kaufe, fahre ich nach Spanien in den Urlaub.
4. Wenn ich ein Fahrrad kaufe, bleibe ich im Urlaub in Mannheim.
5. Ich habe im Vorjahr kein gespartes Geld verbraucht.
6. In diesem Jahr habe ich keine anderen Ausgaben.
7. Es stimmt nicht, dass ich nicht genug Geld gespart habe und weder im Vorjahr gespartes Geld verbraucht habe noch in diesem Jahr andere Ausgaben habe.

Formale Beschreibung von Beispiel 1 (2)

1. $A \rightarrow B$
2. $\neg A \rightarrow C$
3. $B \rightarrow D$
4. $C \rightarrow E$
5. $\neg F$
6. $\neg G$
7. $\neg(\neg A \wedge \neg(F \vee G))$

Berechnung des Wahrheitswerts einer Formel (1)

Aus den Werten der Variablen, den Definitionen der Operatoren und den Präzedenzregeln lässt sich der Wahrheitswert einer Formel berechnen.

Beispiel

Berechnung des Wahrheitswertes von "XY fährt im Urlaub nach Spanien"

D $\leftrightarrow$ 1, d.h. "D ist WAHR" soll gezeigt werden

Berechnung des Wahrheitswerts einer Formel (2)

Rechenweg

5.	$\neg F$	$\leftrightarrow 1$	damit $F \leftrightarrow 0$
6.	$\neg G$	$\leftrightarrow 1$	damit $G \leftrightarrow 0$
7.	$\neg(\neg A \wedge \neg(F \vee G))$	$\leftrightarrow 1$	
	$\neg A \wedge \neg(F \vee G)$	$\leftrightarrow 0$	
	$\neg A \wedge \neg(0 \vee 0)$	$\leftrightarrow 0$	
	$\neg A \wedge \neg 0$	$\leftrightarrow 0$	
	$\neg A \wedge 1$	$\leftrightarrow 0$	
	$\neg A$	$\leftrightarrow 0$	damit $A \leftrightarrow 1$
1.	$A \rightarrow B$	$\leftrightarrow 1$	
	$1 \rightarrow B$		damit $B \leftrightarrow 1$
3.	$B \rightarrow D$		
	$1 \rightarrow D$		damit $D \leftrightarrow 1$

Rechenregeln der Aussagenlogik (1)

Ziel: Vereinfachung von Formeln bei der Berechnung des Wahrheitswertes

I	$a \leftrightarrow \neg\neg a$	Idempotenz
II	$a \wedge a \leftrightarrow a$	
III	$a \vee a \leftrightarrow a$	
IV	$a \wedge b \leftrightarrow b \wedge a$	Kommutativität
V	$a \vee b \leftrightarrow b \vee a$	
VI	$(a \wedge b) \wedge c \leftrightarrow a \wedge (b \wedge c)$	Assoziativität
VII	$(a \vee b) \vee c \leftrightarrow a \vee (b \vee c)$	
VIII	$(a \vee b) \wedge c \leftrightarrow (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$	Distributivität
IX	$(a \wedge b) \vee c \leftrightarrow (a \vee c) \wedge (b \vee c)$	

Rechenregeln der Aussagenlogik (2)

X	$\neg(a \wedge b) \leftrightarrow \neg a \vee \neg b$	Regeln von de Morgan
XI	$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$	
XII	$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a \vee b$	Implikation
XIII	$(a \leftrightarrow b) \leftrightarrow (a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow a)$	Äquivalenz
XIV	$(a \rightarrow b) \wedge (b \rightarrow c) \rightarrow (a \rightarrow c)$	Transitivität
XV	$a \wedge 0 \leftrightarrow 0$	Vereinfachungen
XVI	$a \wedge 1 \leftrightarrow a$	
XVII	$a \vee 0 \leftrightarrow a$	
XVIII	$a \vee 1 \leftrightarrow 1$	
XIX	$a \wedge \neg a \leftrightarrow 0$	

Rechenregeln der Aussagenlogik (3)

XX	$a \vee \neg a \leftrightarrow 1$
XXI	$a \wedge (a \vee b) \leftrightarrow a$
XXII	$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$
XXIII	$(a \wedge b \leftrightarrow 1) \leftrightarrow (a \leftrightarrow 1) \wedge (b \leftrightarrow 1)$

Der Beweis der Korrektheit dieser Regeln erfolgt durch Wertetabellen.

Da die rechte und die linke Seite äquivalent sind, also für eine beliebige Belegung der Variablen die Äquivalenzaussage stets wahr ist, können diese Gesetze in beliebigen Formeln der Aussagenlogik verwendet werden. Aussagen, die immer wahr sind, nennt man auch **Tautologien**.

Vereinfachung des Reisebeispiels durch Umformung (1)

Frage: Ist D wahr?

$(A \rightarrow B) \wedge (\neg A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow D) \wedge$

$(C \rightarrow E) \wedge \neg F \wedge \neg G \wedge \neg(\neg A \wedge \neg (F \vee G)) \leftrightarrow 1$

Vereinfachung der Teilformeln (5)∧(6)∧(7)

	$\neg F \wedge \neg G \wedge \neg(\neg A \wedge \neg(F \vee G)) \leftrightarrow 1$
de Morgan:	$\neg F \wedge \neg G \wedge (\neg\neg A \vee \neg\neg(F \vee G)) \leftrightarrow 1$
Idempotenz:	$\neg F \wedge \neg G \wedge (A \vee F \vee G) \leftrightarrow 1$
Distributivität:	$\neg F \wedge ((A \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G) \vee (G \wedge \neg G)) \leftrightarrow 1$
	$\neg F \wedge ((A \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G) \vee 0) \leftrightarrow 1$
	$\neg F \wedge ((A \wedge \neg G) \vee (F \wedge \neg G)) \leftrightarrow 1$

Vereinfachung des Reisebeispiels durch Umformung (2)

Distributivität: $(\neg F \wedge A \wedge \neg G) \vee (\neg F \wedge F \wedge \neg G) \leftrightarrow 1$

$$(\neg F \wedge A \wedge \neg G) \vee (0 \wedge \neg G) \leftrightarrow 1$$

$$(\neg F \wedge A \wedge \neg G) \vee 0 \leftrightarrow 1$$

$$\neg F \wedge A \wedge \neg G \leftrightarrow 1$$
$$1 \wedge A \wedge 1 \leftrightarrow 1$$
$$A \leftrightarrow 1$$

Also: A ist wahr, XY hat genug Geld gespart.

Vereinfachung des Reisebeispiels durch Umformung (3)

Einsetzen von 'A wahr' in Teilformel (1):

	A	$\rightarrow$	B
Implikation:	$\neg A$	$\vee$	B
A wahr	$\neg 1$	$\vee$	B
	0	$\vee$	B
			B

Also: B ist wahr, XY kauft sich ein Auto.

Vereinfachung des Reisebeispiels durch Umformung (4)

Einsetzen von 'B wahr' in Teilformel (3):

	B	$\rightarrow$	D
Implikation:	$\neg B$	$\vee$	D
B wahr	$\neg 1$	$\vee$	D
			D

Also: D ist wahr, XY fährt im Urlaub nach Spanien.

Anmerkung: $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ heißt "Modus ponens".

Vereinfachung von Ausdrücken (1)

Beispiel 1

$$(a \vee b) \wedge \neg a \wedge \neg b \quad = \quad ((a \vee b) \wedge \neg (a \vee b))$$

$$= \quad 0$$

Dies ist eine **Kontradiktion**: Die Formel ist falsch für alle Belegungen von a und b.

Vereinfachung von Ausdrücken (2)

Beispiel 2

$$a \wedge b \wedge c \vee \neg a \vee \neg b \vee \neg c \quad = \quad (a \wedge b \wedge c) \vee \neg (a \wedge b \wedge c)$$

$$= \quad 1$$

Dies ist eine **Tautologie**: Wahr für alle Belegungen von a und b.

Anmerkung: Das Gesetz von De Morgan gilt auch für drei oder mehr Variable:

$$\neg a \vee \neg b \vee \neg c \quad = \quad \neg a \vee \neg (b \wedge c)$$

$$= \quad \neg (a \wedge (b \wedge c))$$

$$= \quad \neg (a \wedge b \wedge c)$$

Vereinfachung von Ausdrücken (3)

Beispiel 3

$$
\begin{aligned}
a \wedge b \vee c \wedge (\neg a \vee \neg b) &= a \wedge b \vee c \wedge \neg(a \wedge b) \\
&= a \wedge b \vee \neg(a \wedge b) \wedge c \\
&= a \wedge b \vee c
\end{aligned}
$$

Beispiel 4

$$
\begin{aligned}
(a \vee \neg a \wedge b) \wedge (b \vee b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (b) \quad \text{(siehe unten)} \\
&= b
\end{aligned}
$$

a	b	$(a \vee \neg a \wedge b)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Dies ist dieselbe Wahrheitstabelle wie die des "oder"!

Also: $(a \vee \neg a \wedge b) = a \vee b$

Vereinfachung von Ausdrücken (4)

Beobachtung

Gemäß den Regeln der Aussagenlogik lässt sich die Implikation durch die Operatoren ¬ und ∨ ausdrücken:

$$a \rightarrow b \leftrightarrow \neg a \vee b$$

Ebenso läßt sich die Äquivalenz durch die Operatoren

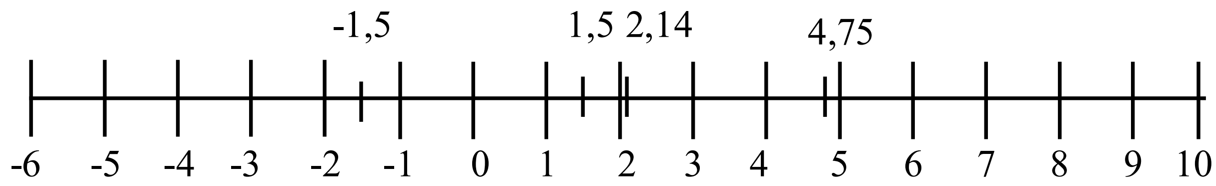
¬, ∧, ∨ ausdrücken

(Übungsaufgabe!)

Wir sehen: Nicht alle Operatoren sind essentiell; die einen lassen sich durch die anderen ausdrücken. Die hier eingeführten Operatoren haben eine na-türliche Semantik und sind daher gebräuchlich.

Arithmetische Vergleichsoperatoren

In der Informatik werden häufig Aussagen über Zahlen gemacht. Innerhalb von Zahlen besteht eine lineare Ordnung. Diese lässt sich durch die Zahlengerade veranschaulichen:



Vergleichsoperatoren für Zahlen

Operator	Name des Operators	Beispiel
=	gleich	1 = 2 liefert den Wert *false*
≠	ungleich	1≠2 liefert den Wert *true*
<	kleiner	1< 2 liefert den Wert *true*
≤	kleiner oder gleich	1≤ 2 liefert den Wert *true*
>	größer	1> 2 liefert den Wert *false*
≥	größer oder gleich	1≥2 liefert den Wert *false*

Aussagen über Zahlen

x und y seien Zahlenvariable

Atomare Aussagen

$5 \neq 7$

$5 < 7$

$7 > 5$

$-5 > -7$

$x = 8.3$

$y = x$

$y = 8.3$

Aussagenlogische Formeln

$(x > 0) \wedge (x < 5)$ entspricht $0 < x < 5$

$(x = y) \wedge (x > 0)$

$\neg(5 = 7)$

Beispiele für gemischte Ausdrücke

a) $X \neq Y \leftrightarrow \neg(X = Y)$

$\neq$ ist nicht essentiell

b) $X \neq Y \leftrightarrow (X < Y) \vee (X > Y)$

c) $X \leq Y \leftrightarrow (X < Y) \vee (X = Y)$

$\leq$, $\geq$ sind nicht essentiell

d) $X < Y \leftrightarrow \neg(X \geq Y)$

e) $(X = Y) \wedge (Y = Z) \rightarrow X = Z$

Transitivität für “=“

f) $(X > Y) \wedge (Y > Z) \rightarrow X > Z$

Transitivität für “>“

Merke: In Verbindung mit der Aussagenlogik sind viele arithmetische Vergleichsoperatoren durch eine Kombination von anderen arithmetische Vergleichsoperatoren und logischen Operatoren ersetzbar.

Semantische Erweiterung von Vergleichsoperatoren (1)

Es ist üblich, die Semantik von Vergleichsoperatoren auch auf andere Objekte auszudehnen, für die eine totale Ordnung vorliegt.

Beispiele

a) Zeichen: Kollationsfolge

'a' < 'b'

'b' < 'y'

Frage: 'a' < 'A' ?

Semantische Erweiterung von Vergleichsoperatoren (2)

b) Zeichenfolge: lexikografische Sortierung

"abc" < "bca"

"david" < "goliath"

"gabriela" < "steffi"

Frage: "3M" < "DREIM" ?

"meierbär" < "meier-bär" ?

Semantische Erweiterung von Vergleichsoperatoren (3)

c) Datum

30.10.89	>	7.2.89
1.1.89	>	31.12.62

Frage: Wie würde man ein Datum unter Verwendung eines Standard-Datentyps einer Programmiersprache darstellen?

In vielen modernen Softwareprodukten ist eine **Datumsarithmetik** eingebaut. Beispiel: Tabellenkalkulation. Man kann dann *datum* als Datentyp benutzen.

d) benutzerdefinierte Datentypen

	dienstag	<	mittwoch
Frage:	sonntag	<	montag ?

Anwendungen der Logik in der Informatik

1) Schaltwerktheorie: Entwurf digitaler Schaltungen

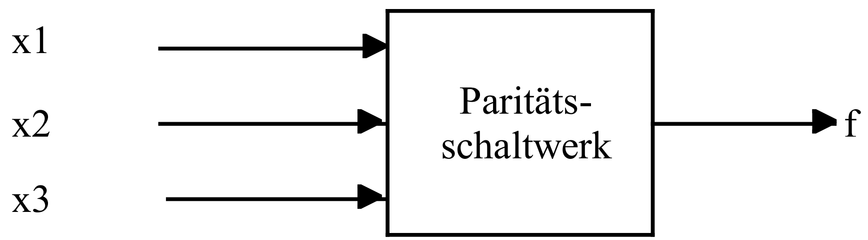
Sei $X = (x_1,x_2,x_3,..,x_n)$ ein binärer Eingangsvektor.

Dann ist $f(X) = f(x_1,x_2,...,x_n)$ eine **Schaltfunktion**, die einen Boole'schen Wert abliefert.

Die Boole'schen Ausdrücke, die f(X) beschreiben, können direkt auf digitale Elektronik-Bausteine abgebildet werden!

Beispiel für eine Schaltfunktion (1)

$f(x_1, x_2, x_3)$ soll das Paritätsbit (ungerade Parität) für x_1, x_2, x_3 berechnen. Ungerade Parität bedeutet, dass die Gesamtzahl der 1-Bits inklusive f ungerade sein muss.



Am Eingang liegt ein dreistelliger Boole'scher Vektor an. Der Ausgang f soll genau dann = 1 sein, wenn null oder zwei Eingänge = 1 sind.

$$f(x_1,x_2,x_3) = (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3)$$

$$\vee\ (x_1 \wedge \neg\, x_2 \wedge x_3) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

Beispiel für eine Schaltfunktion (2)

Wertetabelle für f(x_1, x_2, x_3)

x1	x2	x3	(¬x1∧¬ x2∧¬ x3)	(x1∧ x2∧¬ x3)	(x1∧¬ x2∧ x3)	(¬x1∧ x2∧ x3)	f
0	0	0					
0	0	1					
0	1	0					
0	1	1					
1	0	0					
1	0	1					
1	1	0					
1	1	1					

Expertensysteme, Logik-Programmierung

Das logische Schließen gemäß den Regeln der Aussagenlogik wird **maschinell** durchgeführt.

Fundamentale Aussagen heißen **Fakten.**

Beispiel

F:= 'XY hat im Vorjahr gespartes Geld verbraucht'.

Implikationen heißen **Regeln.**

Beispiel

R1: 'Wenn XY genug Geld gespart hat, dann kauft er sich ein Auto'

Expertensystem – Beispiel

Fakten

A: Albert ist männlich.

B: Edward ist männlich.

C: Alice ist weiblich.

D: Victoria ist weiblich.

E: Edward's Eltern sind Victoria und Albert.

F: Alice's Eltern sind Victoria und Albert.

Regel für "Schwester"

(X ist weiblich) $\wedge$ (X hat Mutter M und Vater V)

$\wedge$ (Y hat Mutter M und Vater V)

$\rightarrow$ X ist Schwester von Y.

Das Expertensystem kann jetzt maschinell zeigen, dass Alice eine Schwester von Edward ist.

Prolog – Beispiel (1)

```
male(albert).
male(edward).
female(alice).
female(victoria).
parents(edward, victoria, albert).
parents(alice, victoria, albert).

sister_of(X, Y):-
        female(X),
        parents(X, M, F),
        parents(Y, M, F).
```

Prolog – Beispiel (2)

?- sister_of(alice, edward).

YES.

?- sister_of(alice, Y).

Y = edward