# Synchronisation in Sensornetzen

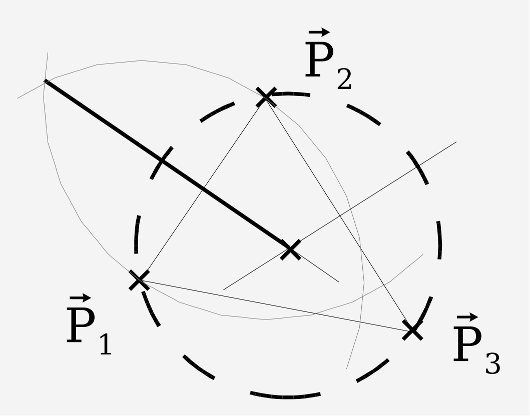


## Ortsbestimmung durch Signallaufzeiten

Ortsbestimmungen können z. B. mit Hilfe genauer Zeitangaben erfolgen, wenn diese mit den Messwerten mitgeliefert werden und die Position der Knoten bekannt ist.

Beispiel:

Die Knoten 1-3 befinden sich an den Orten $P_1$,$P_2$,$P_3$. Die drei Knoten hören ein Ereignis zum Zeitpunkt $t_1$, $t_2$ bzw. $t_3$. Schall bereitet sich gleichförmig in alle Richtungen mit etwa 300m/Sekunde aus. Die Knoten befinden sich näherungsweise in einer Ebene.




Fall 1: $t_1=t_2=t_3$. Wo befindet sich das Objekt?

Sei $P_1=(-2,2)$ / $P_2=(1,1)$ / $P_3=(-1,-2)$

Geometrisch lösen: Verbinde $P_1$ und $P_2$ und fälle das Lot durch die Mitte dieser Geraden. Alle Punkte dieser Gerade sind gleichweit von $P_1$ und $P_2$ entfernt. Es kommen nur noch Punkte der Geraden in Frage. Auf der Geraden muss nun der Punkt gewählt werden, durch den ein Kreis gezeichnet werden kann, der durch $P_1$, $P_2$ und $P_3$ verläuft – konstruktiv nur schwer anzunähern. Einfacher: Man fällt ein zweites Lot, z. B. zwischen $P_2$ und $P_3$ und schneidet beide Lote.

# Synchronisation in Sensornetzen



## Ortsbestimmung durch Signallaufzeiten

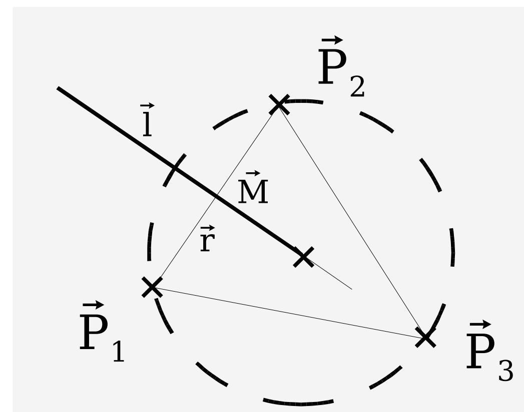
Fall 1: rechnerisch

$$\vec{r}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=\begin{pmatrix}+3\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{M}=\vec{P}_1+0.5\,\vec{r}=\begin{pmatrix}-0,5\\+1,5\end{pmatrix}$$

im 2D gilt:

$$\vec{l}=\begin{pmatrix}+r_y\\-r_x\end{pmatrix} \qquad \text{Probe:} \qquad \vec{l}\,\vec{r}=\begin{pmatrix}+r_y\\-r_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r_x\\r_y\end{pmatrix}=r_y r_x-r_x r_y=0$$

hier: $\vec{l}=\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$




Alle Punkte x auf dem Lot, „adressiert“ durch Param. p:

$$\vec{x}_p=\vec{M}+p\,\vec{l}=\begin{pmatrix}-0,5\\+1,5\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$$

Gesucht wird das p, für das gilt:

$$|x_p-P_1|^2=|x_p-P_3|^2$$

$$\left[\begin{pmatrix}-0,5\\+1,5\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\+2\end{pmatrix}\right]^2=\left[\begin{pmatrix}-0,5\\+1,5\end{pmatrix}+p\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\right]^2$$

$$18,5-2\,p8+10\,p^2=2,5+2\,p3+10\,p^2$$

$p=\frac{15}{24}$ für den gesuchten Punkt ergibt sich: $\begin{pmatrix}-0,5\\+1,5\end{pmatrix}+\frac{15}{24}\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1,125\\-0,375\end{pmatrix}$

Hinweis: Der Ansatz funktioniert ganz analog für $t_1=t_2=(t_3+\text{delta})$

# Synchronisation in Sensornetzen



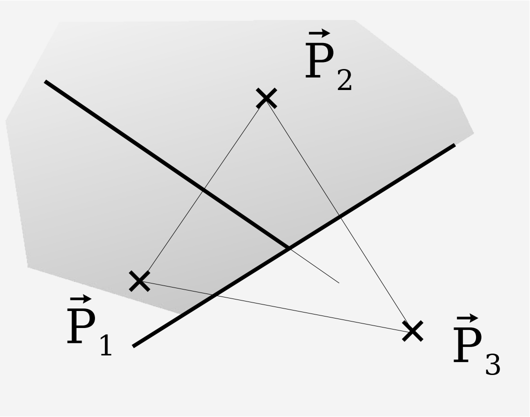
## Ortsbestimmung durch Zeitangaben

Ortsbestimmungen können z. B. mit Hilfe genauer Zeitangaben erfolgen, wenn diese mit den Messwerten mitgeliefert werden und die Position der Knoten bekannt ist.

Beispiel:

Fall 2: $t_1 = t_2$, $t_3 > t_2$. Kann man die Position immer noch abschätzen?

Wegen $t_1 = t_2$ muss die Schallquelle immer noch auf der Mittelsenkrechten zwischen $P_1$ und $P_2$ liegen. Da jedoch $P_3$ das Ereignis später hört als $P_2$, kommt nur die Halbgerade oberhalb der zweiten Mittelsenkrechten zwischen $P_2$ und $P_3$ in Frage,



# Synchronisation in Sensornetzen

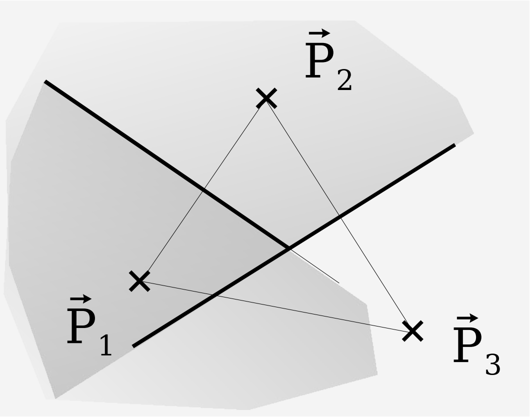


## Ortsbestimmung durch Zeitangaben

Ortsbestimmungen können z. B. mit Hilfe genauer Zeitangaben erfolgen, wenn diese mit den Messwerten mitgeliefert werden und die Position der Knoten bekannt ist.

Beispiel:

Fall 3: $t_1 < t_2 < t_3$. Wie sieht der Bereich aus, in dem sich das Objekt befinden muss?




Wenn die Sonderfälle, Fall 1-3 zu einer genauen Orts-berechnug führen, kann diese möglicherweise für bel. Zeiten erfolgen. Wie?

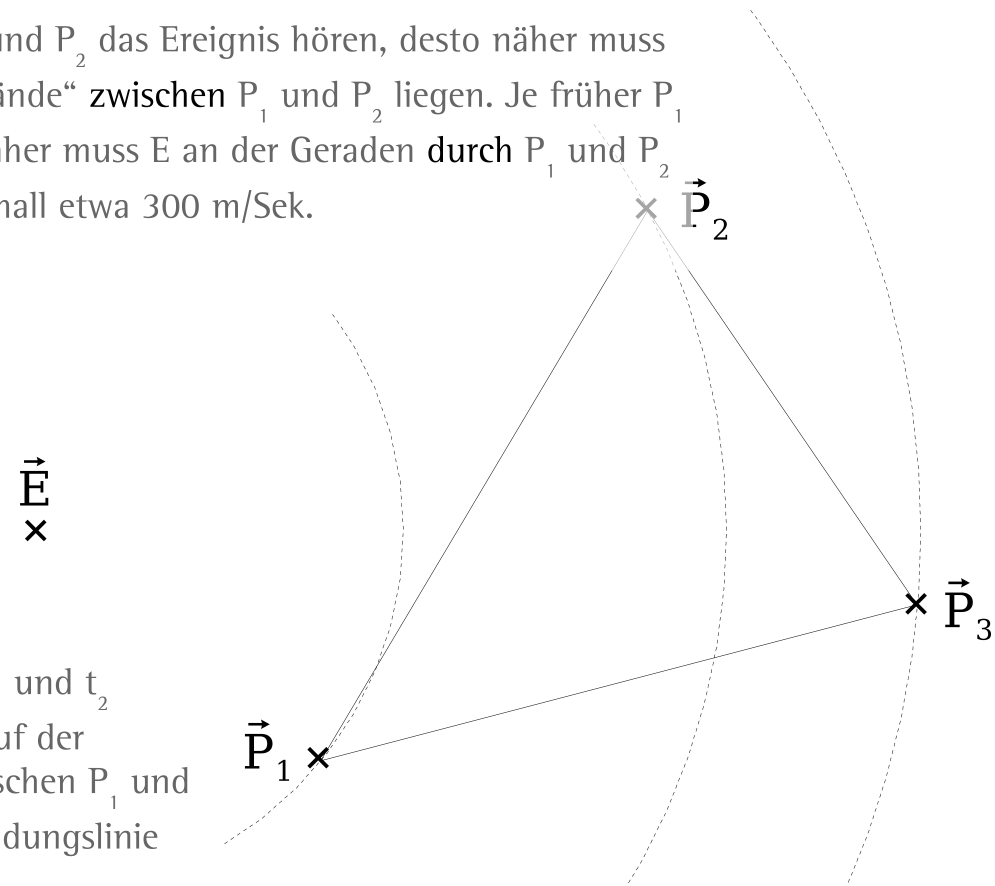
# Synchronisation in Sensornetzen

Ortsbestimmung durch Signallaufzeiten

## Ortsbestimmung mit Zeitangaben

Fall 4: Nun seien alle Zeitangaben $t_1$, $t_2$ und $t_3$ exakt gegeben. In diesem Fall läßt sich die Position E des schallerzeugenden Ereignisses theoretisch genau bestimmen.

Im Beispiel gelte oBdA $t_1<t_2<t_3$
Beobachtung: Je zeitnäher $P_1$ und $P_2$ das Ereignis hören, desto näher muss E an der Gerade „gleicher Abstände“ **zwischen** $P_1$ und $P_2$ liegen. Je früher $P_1$ das Signal vor $P_2$ hört, desto näher muss E an der Geraden **durch** $P_1$ und $P_2$ liegen. Geschwindigkeit von Schall etwa 300 m/Sek.
Die Zeitdifferenz $|t_2-t_1|$ kann also maximal $|P_1-P_2|/300$ Sekunden betragen. Braucht das Signal zwischen $P_1$ und $P_2$ die maximale Zeit, so muss die Schallquelle auf der Geraden durch $P_1$ und $P_2$ liegen.
Ist die Zeitdifferenz zwischen $t_1$ und $t_2$ gerade Null, so liegt E genau auf der Geraden gleicher Abstände zwischen $P_1$ und $P_2$ (also auf dem Lot der Verbindungslinie zwischen beiden Knoten).



# Synchronisation in Sensornetzen

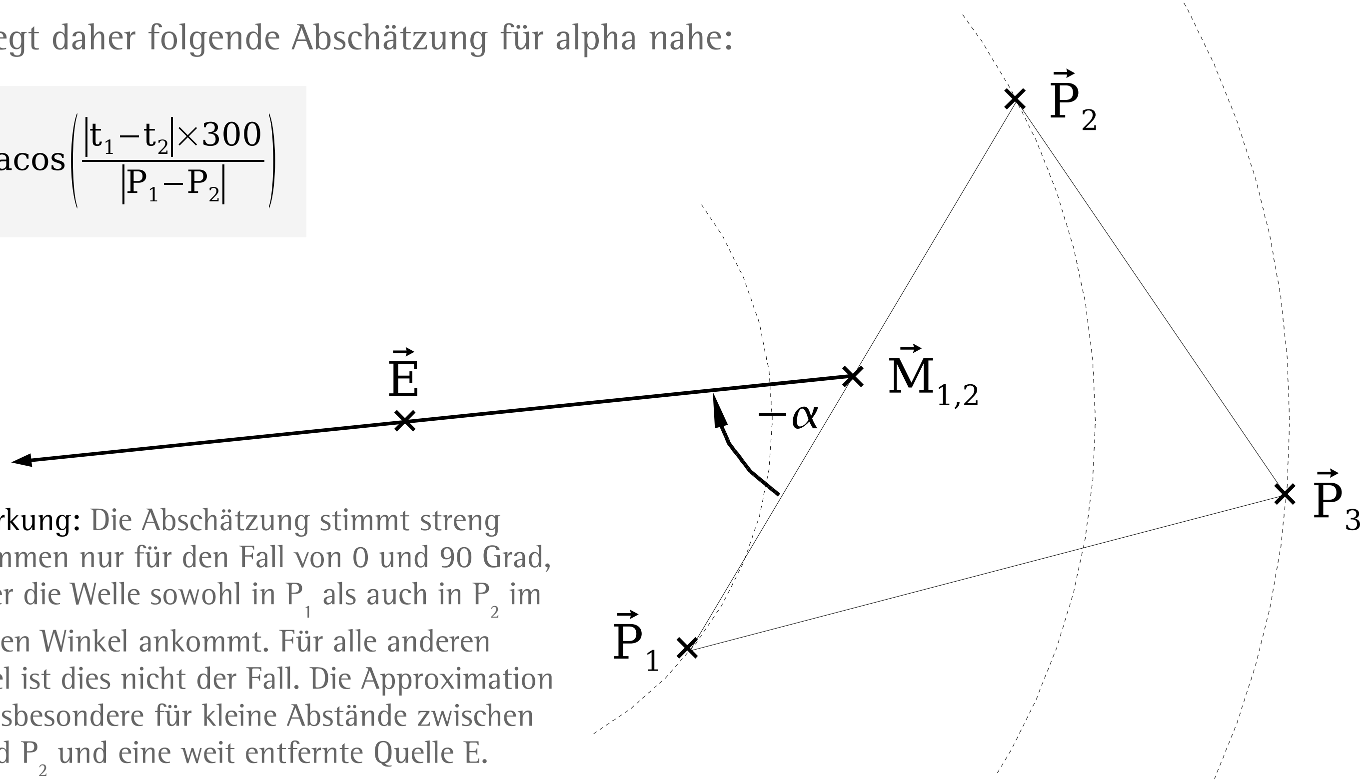


## Ortsbestimmung mit Zeitangaben

Sei M der Mittelpunkt zwischen $P_1$ und $P_2$. Betrachtet man den Winkel alpha zwischer der Gerade durch E und M und der Geraden durch $P_2$ und $P_1$ so stellt man fest, dass alpha bei einer zeitlichen Differenz $|t_1 - t_2|$ von 0 gerade 90 Grad beträgt, bei einer max. Zeitdifferenz beträgt der Winkel 0 Grad.

Es liegt daher folgende Abschätzung für alpha nahe:

$$\alpha = \operatorname{acos}\left(\frac{|t_1 - t_2| \times 300}{|P_1 - P_2|}\right)$$




**Bemerkung:** Die Abschätzung stimmt streng genommen nur für den Fall von 0 und 90 Grad, da hier die Welle sowohl in $P_1$ als auch in $P_2$ im gleichen Winkel ankommt. Für alle anderen Winkel ist dies nicht der Fall. Die Approximation gilt insbesondere für kleine Abstände zwischen $P_1$ und $P_2$ und eine weit entfernte Quelle E.

# Synchronisation in Sensornetzen



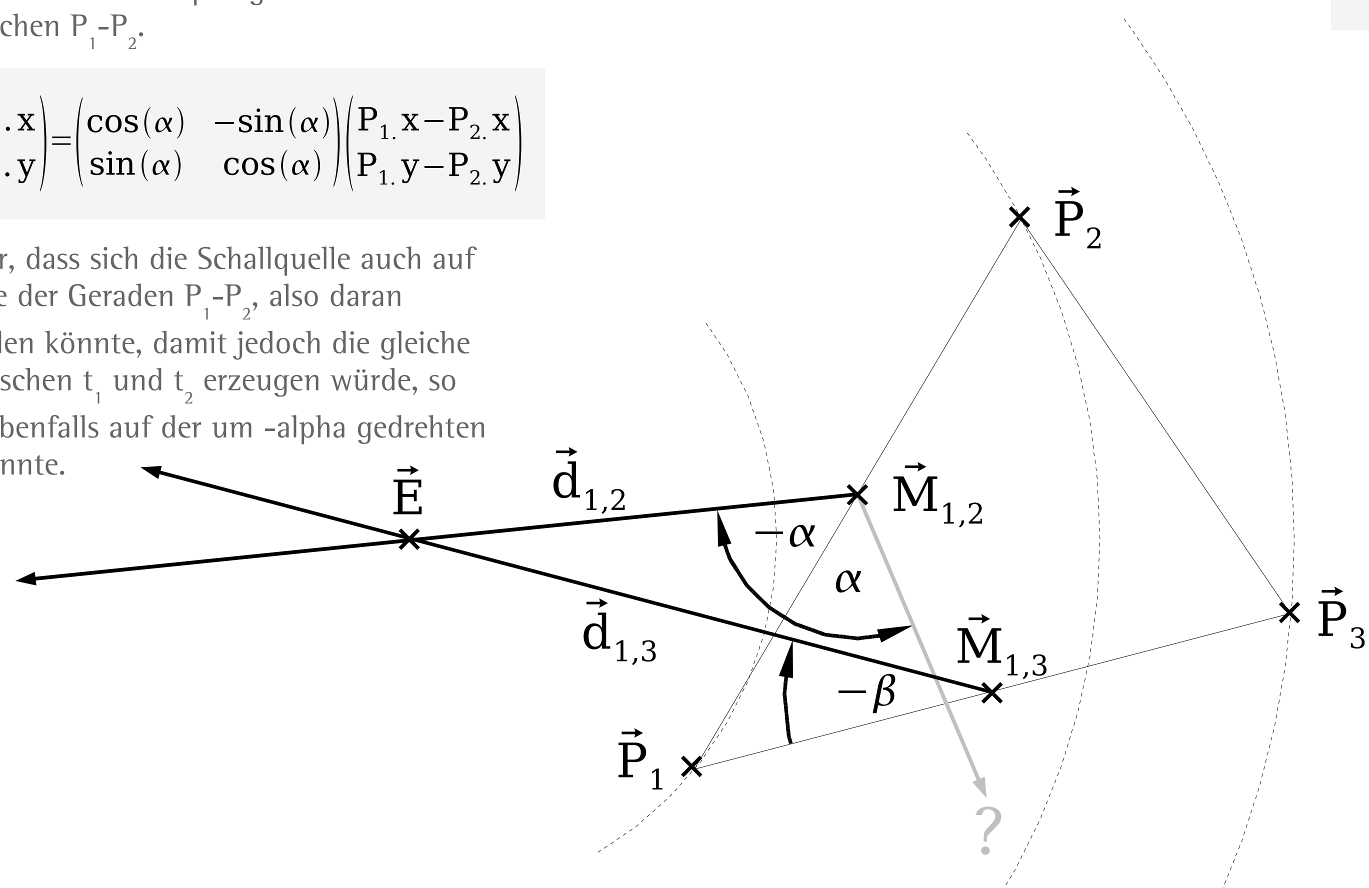
## Ortsbestimmung mit Zeitangaben

Würde man nun den Winkel zwischen zwei Paaren von Knoten, also z. B. $P_1$,$P_2$ und $P_1$, $P_3$ berechnen, so könnte man die entstehenden Geraden schneiden und so die Position der Schallquelle abschätzen.

Zuerst muss der Richtungsvektor d berechnet werden. Er entspricht gerade der um -alpha gedrehten Verbindung zwischen $P_1$-$P_2$.

$$\begin{pmatrix} d_{1,2}.x \\ d_{1,2}.y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{1.}x - P_{2.}x \\ P_{1.}y - P_{2.}y \end{pmatrix}$$

Man beachte hier, dass sich die Schallquelle auch auf der anderen Seite der Geraden $P_1$-$P_2$, also daran gespiegelt befinden könnte, damit jedoch die gleiche Zeitdifferenz zwischen $t_1$ und $t_2$ erzeugen würde, so dass die Quelle ebenfalls auf der um -alpha gedrehten Gerade liegen könnte.



# Synchronisation in Sensornetzen



## Ortsbestimmung mit Zeitangaben

Nun müssen Gerade 1 durch $M_{1,2}$ mit Richtungsvektor $d_{1,2}$ und Gerade 2 durch $M_{1,3}$ mit Richtungsvektor $d_{1,3}$ miteinander geschnitten werden.

$x_I = M_{1,2} + r \times d_{1,2}$ Alle Punkte auf der Geraden 1

$x_{II} = M_{1,3} + s \times d_{1,3}$ Alle Punkte auf der Geraden 2

$M_{1,3} + s \times d_{1,3} = M_{1,2} + r \times d_{1,2} \Leftrightarrow B = r \times d_{1,2} - s \times d_{1,3}$ mit Substitution $B = M_{1,3} - M_{1,2}$

$$\begin{pmatrix} B.x \\ B.y \end{pmatrix} = r \times \begin{pmatrix} d_{1,2}.x \\ d_{1,2}.y \end{pmatrix} - s \times \begin{pmatrix} d_{1,3}.x \\ d_{1,3}.y \end{pmatrix}$$

$r = \dfrac{B.x + s \times d_{1,3}.x}{d_{1,2}.x}$ $s = \dfrac{r \times d_{1,2}.y - B.y}{d_{1,3}.y}$ s in Gleichung f. r einsetzen

$$r \times d_{1,2}.x \times d_{1,3}.y = B.x \times d_{1,3}.y + r \times d_{1,3}.x \times d_{1,2}.y - d_{1,3}.x \times B.y$$

$r \times (d_{1,2}.x \times d_{1,3}.y - d_{1,3}.x \times d_{1,2}.y) = B.x \times d_{1,3}.y - d_{1,3}.x \times B.y$ ...auflösen nach r und Rücksubstitution

$$r = \frac{(M_{1,3}.x - M_{1,2}.x) d_{1,3}.y - (M_{1,3}.y - M_{1,2}.y) d_{1,3}.x}{d_{1,2}.x \times d_{1,3}.y - d_{1,3}.x \times d_{1,2}.y}$$

r kann dann in die Gleichung der ersten Geraden eingesetzt werden um eine Abschätzung für den Ort der Schallquelle zu erhalten. Gültige Orte entstehen nur für r > 0 und s > 0!

# Synchronisation in Sensornetzen



## Ortsbestimmung mit Zeitangaben

Weder Winkel (hier alpha und beta) kann in zwei Richtungen abgetragen werden, ohne eine Bedingung zu verletzen. Die unterschiedlichen Fälle können zuletzt noch mittels Knotenpaar $P_2$, $P_3$ auf Plausibilität untersucht werden.

Alternativ können die Laufzeiten von den nun bekannten Schnittpunkten S zu Punkt $P_3$ und $P_2$ berechnet werden. Nur für die richtige Variante von S entspricht der berechnete Laufzeitunterschied dem bereits gemessenen.