Universität Mannheim
Lehrstuhl für Praktische Informatik IV
Prof. Dr. W. Effelsberg
Christoph Kuhmünch, Gerald Kühne

Praktische Informatik I
WS 1999/2000

Übungsblatt 10 **Ausgabe: Mi, 12.01.00** **Abgabe: Di, 18.01.00, 18 Uhr**

Aufgabe 1: Logelei [6 Punkte]

(nach Zweistein) „Wann arbeitest du eigentlich?“, fragt der Informatikstudent Meier seinen Kommilitonen Müller. „Drücke dich gefälligst etwas präziser aus“, antwortet dieser. „Ich meine, an welchen Tagen der kommenden Woche du arbeiten wirst und an welchen nicht“, präzisiert Meier. „Das will ich dir genau sagen, sonntags nie“, antwortet Müller und fährt fort: „Wenn ich Samstag nicht arbeite, dann arbeite ich am Freitag. Wenn ich Dienstag nicht, wohl aber Freitag arbeite, dann arbeite ich Donnerstag. Wenn es zutrifft, daß, wenn ich Dienstag nicht arbeite, ich zwar Montag nicht, jedoch am Donnerstag arbeite, dann arbeite ich am Samstag. Wenn ich Dienstag arbeite, dann arbeite ich Mittwoch nicht. Wenn ich Montag arbeite, dann arbeite ich Freitag nicht. Wenn ich am Samstag arbeite, dann arbeite ich Donnerstag nicht, wohl aber am Freitag. Und so halte ich es jede Woche“. Verwirrt fragt Meier seinen Freund: „An welchen Wochentagen arbeitest du denn nun tatsächlich und an welchen nicht?“. Müller antwortet gereizt: „Das habe ich dir doch soeben lang und breit erklärt“. Wer kann Meier helfen? (Formulieren Sie eine formale Beschreibung mit der Aussagenlogik und berechnen Sie die Lösung (von Hand).)

Lösung:

(1) $\neg So$

(2) $\neg Sa \rightarrow Fr = Sa \vee Fr$

(3) $\neg Di \wedge FR \rightarrow Do = Di \vee \neg Fr \vee Do$

(4) $(\neg Di \rightarrow \neg Mo \wedge Do) \rightarrow Sa = (\neg Di \vee Sa) \wedge (Mo \vee \neg Do \vee Sa)$

(5) $Di \rightarrow \neg Mi = \neg Di \vee \neg Mi$

(6) $Mo \rightarrow \neg Fr = \neg Mo \vee \neg Fr$

(7) $Sa \rightarrow (\neg Do \wedge Fr) = \neg Sa \vee (\neg Do \wedge Fr)$

Die Lösung kann auf 3 Arten hergeleitet werden: direkt durch Verknüpfung der verschiedenen Aussagen, indirekt durch Beweisen und mittels Wahrheitstabellen. Der kürzeste Lösungsweg ist der indirekte Beweis:
Angenommen $\neg Sa$
$\rightarrow Fr, \neg Di$ (2)(4)
$\rightarrow Do$ (3)
$\rightarrow Mo$ (4)
$\rightarrow \neg Fr$ (6)$WIDERSPRUCH!! \rightarrow Sa$
$\rightarrow \neg Do,\ Fr$ (7)
$\rightarrow \neg Mo$ (6)
$\rightarrow Di$ (3)

$\rightarrow \neg Mi$ (5)
$\rightarrow \neg Mo \wedge Di \wedge \neg Mi \wedge \neg Do \wedge Fr \wedge Sa \wedge \neg So$
Das Einsetzen der Lösung in die Aussagen führt zu keinem Widerspruch.

Aufgabe 2: Aussagenlogik [6 Punkte]

Neben den bekannten booleschen Funktionen seien noch zwei weitere definiert:

$$
\begin{array}{lcll}
a\overline{\wedge}b & := & \neg(a \wedge b) & NAND \\
a\overline{\vee}b & := & \neg(a \vee b) & NOR
\end{array}
$$

(a) [2 Punkte] Geben Sie die Wahrheitstafeln für diese Funktionen an.

Lösung:

a	b	$a\overline{\wedge}b$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

a	b	$a\overline{\vee}b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

(b) [4 Punkte] Beweisen Sie (ohne Verwendung von Wahrheitstafeln), daß sich jeder boolesche Ausdruck ausschließlich durch Verwendung der NOR-Funktion darstellen läßt. Hinweis: Da sich jeder boolesche Ausdruck durch die Grundoperationen *UND*, *ODER* und *NEGATION* darstellen läßt, genügt es, diese drei Operatoren durch **NOR** darzustellen.

Lösung:

$$
\begin{array}{llcll}
\neg: & \neg a & \Longleftrightarrow & \neg(a \vee a) & \textit{(Idempotenz)} \\
 & & \Longleftrightarrow & a\overline{\vee}a & \textit{(Definition)} \\
 & & & & \\
\wedge: & a \wedge b & \Longleftrightarrow & \neg(\neg(a \wedge b)) & \textit{(Idempotenz)} \\
 & & \Longleftrightarrow & \neg\neg a \wedge \neg\neg b & \textit{(dopp. Negation)} \\
 & & \Longleftrightarrow & \neg(\neg a \vee \neg b) & \textit{(de Morgan)} \\
 & & \Longleftrightarrow & \neg a\overline{\vee}\neg b & \textit{(Definition)} \\
 & & \Longleftrightarrow & (a\overline{\vee}a)\overline{\vee}(b\overline{\vee}b) & \textit{(Negation)} \\
 & & & & \\
\vee: & a \vee b & \Longleftrightarrow & \neg\neg(a \vee b) & \textit{(dopp. Negation)} \\
 & & \Longleftrightarrow & \neg(a\overline{\vee}b) & \textit{(Definition)} \\
 & & \Longleftrightarrow & (a\overline{\vee}b)\overline{\vee}(a\overline{\vee}b) & \textit{(Negation)}
\end{array}
$$

Aufgabe 3: Aussagenlogik [8 Punkte]

Zeigen Sie durch algebraische Umformungen folgende Äquivalenzen. Greifen Sie dabei auf die Definition und Rechenregeln der Vorlesung zurück. Verwenden Sie keine Wahrheitstabellen!

1. $a \oplus b \iff (a \vee b) \wedge (\neg a \vee \neg b)$

2. $a \vee \neg a \wedge b \iff a \vee b$

3. $a \rightarrow b \iff \neg b \rightarrow \neg a$

4. $(a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \vee b \wedge (\neg a \vee \neg c) \iff a \vee b$

Lösung:

1.
$$\begin{aligned} a \oplus b &\iff \neg(a \leftrightarrow b) && \textit{(Definition)} \\ &\iff \neg(a \wedge b \vee \neg a \wedge \neg b) && \textit{(Definition)} \\ &\iff \neg(a \wedge b) \wedge \neg(\neg a \wedge \neg b) && \textit{(de Morgan)} \\ &\iff (\neg a \vee \neg b) \wedge (a \vee b) && \textit{(de Morgan, Idempotenz)} \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} a \vee \neg a \wedge b &\iff (a \vee \neg a) \wedge (a \vee b) && \textit{(Distributivität)} \\ &\iff 1 \wedge (a \vee b) && \textit{(Tautologie)} \\ &\iff a \vee b \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} a \rightarrow b &\iff \neg a \vee b && \textit{(Definition)} \\ &\iff b \vee \neg a && \textit{(Kommutativiät)} \\ &\iff \neg(\neg b) \vee \neg a && \textit{(Idempotenz)} \\ &\iff \neg b \rightarrow \neg a && \textit{(Definition)} \end{aligned}$$

4. $(a \vee b) \wedge (c \vee \neg b) \vee b \wedge (\neg a \vee \neg c)$
$$\begin{aligned} &\iff [(a \vee b) \wedge (c \vee \neg b)] \vee [b \wedge (\neg a \vee \neg c)] \\ &\iff [(a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c) \vee (b \wedge \neg b)] \vee [b \wedge \neg(a \wedge c)] \\ &\iff (a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c) \vee [b \wedge \neg(a \wedge c)] \\ &\iff [(a \wedge c) \vee (b \wedge \neg(a \wedge c))] \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c) \\ &\iff [(a \wedge c) \vee b] \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c) \\ &\iff (a \wedge c) \vee b \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c) \\ &\iff (a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee [b \vee (b \wedge c)] \\ &\iff (a \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee b \\ &\iff (a \wedge c) \vee [(a \wedge \neg b) \vee b] \\ &\iff (a \wedge c) \vee a \vee b \\ &\iff [(a \wedge c) \vee a] \vee b \\ &\iff a \vee b \end{aligned}$$