

JAVA-BASIERTES TRAININGSYSTEM ZUR  
FOURIERTRANSFORMATION

Studienarbeit  
von  
Christiane Adler  
aus  
Bad Soden im Taunus

vorgelegt am

Lehrstuhl für Praktische Informatik IV  
Prof. Dr. W. Effelsberg  
Fakultät für Mathematik und Informatik  
Universität Mannheim

Dezember 2002

Betreuer: Hans Christian Liebig und Dirk Farin

**Inhaltsverzeichnis**

Abkürzungsverzeichnis	IV
Abbildungsverzeichnis	V
Tabellenverzeichnis	VII
1 Einleitung	1
2 E-Learning	2
2.1 Untergliederung von E-Learning	2
2.2 Content und Content-Entwicklung	5
3 Signalverarbeitung	7
4 Mathematischer Hintergrund der Fouriertransformation	8
4.1 Gerade und ungerade Funktion	8
4.2 Fourierreihen	9
4.3 Faltung	11
4.4 Kontinuierliche Fouriertransformation	13
4.5 Eigenschaften der Fouriertransformation	13
5 Implementierung	14
5.1 Architekturdesign	15
5.1.1. Aufgabenbereich	16
5.1.2. Bereich zum Üben	17
5.2 Instruktionsdesign	18
5.2.1. Aufgabenbereich	18
5.2.2. Bereich zum Üben	19
5.3 Verwendete Funktionen	20
5.3.1. Kosinusfunktion	21
5.3.2. Diracimpulsfolge	22

### III

5.3.3.	Rechteckimpuls	23
5.3.4.	Rampenfunktion	23
5.3.5.	Sprungfunktion	24
5.4	Kombination von Funktionen	24
5.4.1.	Additionsfunktion	25
5.4.2.	Multiplikationsfunktion	25
5.4.3.	Faltungsfunktion	25
5.4.4.	Wertebereiche	25
5.5	Aufgabenauswahl	26
6	Zusammenfassung und Ausblick	26
	Literaturverzeichnis	VIII

**Abkürzungsverzeichnis**

CBT: Computer Based Training

PDF: Acrobat Portable Document Format

ULI: Universitärer Lehrverbund Informatik

WBT: Web Based Training

**Abbildungsverzeichnis**

Abbildung 1:	Stand des Einsatzes von multimedialen Lernmitteln für die betriebliche Weiterbildung 2000 in Kleinen/Mittleren Unternehmen	1
Abbildung 2:	Bestandteile einer Lernplattform	3
Abbildung 3:	Planung und Bereitstellung von Content	6
Abbildung 4:	Implementierung von Web-based Training	6
Abbildung 5:	Gerade Funktion	9
Abbildung 6:	Ungerade Funktion	9
Abbildung 7:	Dreiecksfunktion $f(t)$ und sukzessive Näherung durch eine Fourierreihe mit mehr und mehr Reihengliedern	10
Abbildung 8:	Geometrische Deutung der Faltung	11
Abbildung 9:	Verwendete Klassen	15
Abbildung 10:	Aufgabenbereich	16
Abbildung 11:	Übungsbereich	17
Abbildung 12:	Grafische Oberfläche des Aufgabenbereichs vor und nach der Lösungsanzeige	19
Abbildung 13:	Grafische Oberfläche des Übungsbereichs mit einer Funktion dargestellt im reellen Bereich und mit Betrag	19
Abbildung 14:	Grafische Oberfläche des Übungsbereichs mit zwei Funktionen vor und nach der Berechnung	20
Abbildung 15:	Kosinusfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte	21
Abbildung 16:	Diracimpulsfolge im Zeitbereich und ihre Transformierte	22

Abbildung 17:	Rechteckimpuls im Zeitbereich und ihre Transformierte	23
Abbildung 18:	Rampenfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte	24
Abbildung 19:	Sprungfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte	24

**Tabellenverzeichnis**

Tabelle 1:	Typologie Computergestützten Lernens	3
Tabelle 2:	Computergestütztes Lernen	4
Tabelle 3:	Basistechnologien des internetbasierten Lernens	5
Tabelle 4:	Eigenschaften der Fouriertransformation	14
Tabelle 5:	Transformationspaare	21

## 1 Einleitung

Das Internet ist nicht nur als Informationsmedium und als Verkaufsplattform geeignet, sondern auch als Lerninstrument. Viele Unternehmen und Universitäten haben die Wichtigkeit und die Vorteile von E-Learning erkannt. Allerdings nutzt nur eine Minderheit Web Based Training (WBT), Computer Based Training (CBT) oder andere E-Learningmedien tatsächlich (siehe hierzu Abbildung 1). Einer der Gründe dafür ist, dass eine einfache Präsentation und Kommunikation mit Hilfe des Internets nicht ausreichen, es müssen auch die Lerninhalte (Content) erstellt werden. Viele Ansätze scheitern gerade am Content und an der Betreuung der Lernenden.

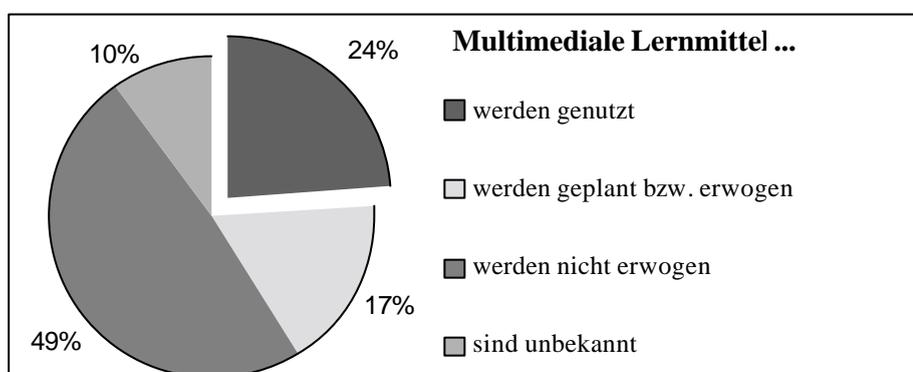


Abbildung 1: Stand des Einsatzes von multimedialen Lernmitteln für die betriebliche Weiterbildung 2000 in Kleinen/Mittleren Unternehmen

Quelle: Michel, Lutz P. (2001), ppt-Datei, S. 10

Im Zusammenhang eines E-Learning-Konzepts des Online-Studiums der Informatik im Projekt Universitärer Lehrverbund Informatik (ULI) werden unterschiedliche Inhalte der Vorlesung für den Online-Übungsbetrieb aufbereitet und geprüft. Java-Applets zu verschiedenen Themen sollen zum besseren Verständnis für die Studenten in den Übungsbetrieb eingebaut werden.

In der folgenden Arbeit und im Java-Programm wird das Thema der Fouriertransformation behandelt. Der Student lernt anhand von mehreren Funktionen und Operatoren das Verhalten von Funktionen im Zeitbereich und deren Fouriertransformierten im Frequenzbereich kennen.

Es erfolgt eine Einführung in die Themenbereiche E-Learning und Content-Entwicklung. Zum besseren Verständnis der Fouriertransformation wird im Anschluss daran der technische und mathematische Hintergrund dieser Transformation behandelt.

Die nächsten Kapitel über die Implementierung bestehen aus den beiden Bereichen Architekturdesign und Instruktionsdesign. Den Abschluss der Studienarbeit bildet das Fazit mit dem Ausblick.

## 2 E-Learning

Unter E-Learning versteht man in der Praxis die Nutzung von Intranets, Extranets und Internet zur Aus- und Weiterbildung. Als Synonym wird häufig der Begriff Web Based Training (WBT) verwendet. Mit dieser engen Definition würden Compact Disks (CDs) und Videos nicht dazuzählen<sup>1</sup>. Eine weiter gefasste Definition legt fest, dass unter E Learning alle Formen des Computergestützten Lernens verstanden werden.<sup>2</sup> Wissen wird mit Hilfe von Computern und auch von Computernetzen vermittelt<sup>3</sup>. Diese weiter gefasste Version wird der Arbeit zugrunde gelegt, da die enge Definition viele technische bzw. elektronische Möglichkeiten außer Acht lässt.

### 2.1 Untergliederung von E-Learning

E-Learning kann in verschiedene Typen wie z.B. Tutorielle Lernprogramme, Übungs- und Testprogramme und Online-Learning-Systeme untergliedert werden (siehe hierzu Tabelle 1)

<i>Typ des Computergestützten Lernens</i>	<i>Merkmale</i>
<b>Instruktions-, Dokumentations- und Hilfesysteme</b>	Stellen Informationen zu Sachverhalten oder Produkten dar; unterstützen bei Begriffssuche und Vernetzung von Begriffen => <b>“Elektronisches Handbuch”</b> .
<b>Tutorielle Lernprogramme</b>	Auf Aktionen des Lernenden wird helfend und beurteilend reagiert; Ziel: an Lernfortschritt angepasster Unterricht. Betonung auf didaktischer Konzeption => <b>“Computervermittelter Betreuer oder Lehrer”</b> .
<b>Übungs- und Testprogramme</b>	Vermitteln abfragbares Wissen oft in sequentieller Abfolge; Bewertung des Lernergebnisses erfolgt nach fester Vorgabe => <b>“Elektronischer Arbeitsbogen”, “Drill-and-practice”</b> .

<sup>1</sup> Vgl. Bock, Petra (2001), pdf-Dokument, S. 23

<sup>2</sup> Vgl. o.V., Daten & Dokumentation Glossar, HTML-Seite

<sup>3</sup> Vgl. o.V., IBM E-Learning Services, HTML-Seite

<b>Interaktive Fallstudien (Rollenspiele)</b>	Anhand von fiktiven Situationen werden hier computergestützt eine Handlungs- und Entscheidungs-Analyse durchgeführt und die daraus resultierenden Folgen dargestellt. => <b>“Interaktiver Eignungstest”, “Computergestütztes Verhaltenstraining”</b> .
<b>Simulationen</b>	Abbildung komplexer Zusammenhänge und Prozesse mit der Möglichkeit, die bestimmenden Variablen zu verändern und die Auswirkungen zu beobachten.
<b>Expertensysteme / Lernende Systeme</b>	Darstellung von Gesetzmäßigkeiten auf Basis menschlichem Expertenwissens; Erweiterung des Ansatzes durch “Lernmöglichkeit” des Computers und Weiterentwicklung und Anwendung der ursprünglichen Regeln => <b>“Künstlicher Experte”</b> .
<b>Online-Learning-Systeme</b>	Distribution verschiedener Lernkonzepte und -inhalte in Daten-netzen mit der Möglichkeit, asynchrone Feedbacks mit den Anbietern und zwischen den Nutzern herzustellen. => <b>“Lernen im Netz”, “Telelearning”</b> .

Tabelle 1: Typologie Computergestützten Lernens

Quelle: Michel, Lutz P. et al. (2000), pdf-Dokument, S. 20

Das vorliegende Java-Programm ist für sich alleine betrachtet ein Tutorielles Lernprogramm. Integriert im Projekt ULI ist es ein Teil eines Online-Learning-Systems.

E-Learning Systeme gibt es in den unterschiedlichsten Formen und Ausprägungen. Eine komplette Lernplattform beinhaltet die unter Abbildung 2 abgebildeten Komponenten.

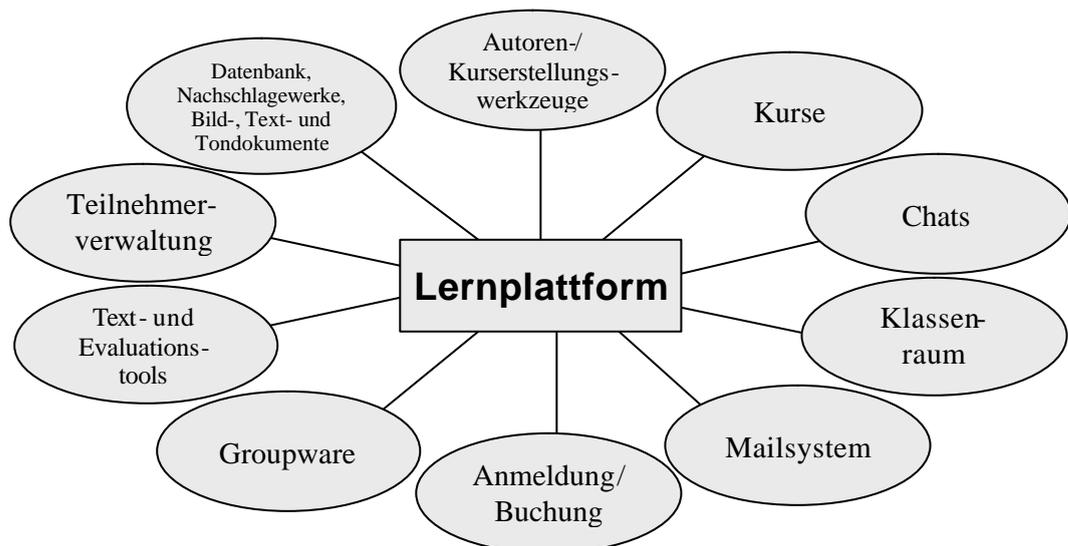


Abbildung 2: Bestandteile einer Lernplattform

Quelle: Bock, Petra (2001), pdf-Dokument, S. 24

Bei der Auswahl bzw. Gestaltung einer Lernplattform ist der Funktionsumfang auf die spezifischen Anforderungen und Rahmenbedingungen abzustimmen. Dabei ist nicht nur auf technische, sondern auch auf rechtliche und organisatorische Kriterien zu achten. Die folgende Tabelle zeigt die Einteilung in Basisfunktionen und erweiterte Funktionen von Lernplattformen:

<b>Basisfunktionen</b>	<b>Erweiterte Funktionen</b>
Administration: Lernender, Lerngruppe, Lerninhalte, Kurse, Systemeinstellungen	Tutoring: Betreuung durch Tutoren, Beurteilungen, Tutoren-Kommunikationssystem
Portal für Lernende: Kursübersicht, Navigation, Suchfunktion, Glossar, Bibliothek, persönliche Notizen	Autorensystem: Erstellen von Lerninhalten und Kursen, Kombination und Strukturierung von Lerninhalten
Kommunikation: Diskussionsforen, Chat-Möglichkeiten, Email-System, schwarzes Brett	Controlling: Evaluierung, Kurscontrolling, Ressourceneinsatz
Tests: Lernkontrollen, Assessments, Zertifizierung	E-Learning live: virtueller Seminarraum, Web-TV
Reporting: Statistiken über Lernprozesse, Testergebnisse, Kursbelegung und -teilnehmer	Ressourcen- und Skill-Management

Tabelle 2: Computergestütztes Lernen

Quelle: Zeitler, Franziska, E-Learning – multimediales Lernen online, pdf-Dokument, S. 2

Bei den Medien wird in synchrone und asynchrone unterschieden (siehe Tabelle 3). Bei den asynchronen Medien erfolgt die Kommunikation zeitversetzt, d.h. die Teilnehmer müssen nicht zum gleichen Zeitpunkt online sein. Bei synchronen Medien sind alle Teilnehmer gleichzeitig online und eine Kommunikation erfolgt wie in einem „normalen“ Gespräch.

<b>Asynchrone Medien</b>	<b>Synchrone Medien</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Elektronische Mailsysteme</li> <li>• News Groups, Usenet u.a.</li> <li>• Online Datenbanken, News Services u.a.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Online Chat</li> <li>• Videokonferenzsysteme</li> <li>• Whiteboard</li> <li>• Application Sharing</li> <li>• Elektronische Meeting Support Systeme</li> </ul>

Tabelle 3: Basistechnologien des internetbasierten Lernens

Quelle: Michel, Lutz P. (2001), ppt-Datei, S.6

Der Online-Übungsbetrieb des Projekts ULI basiert auf asynchronen Medien. Der Student löst unterschiedliche Aufgaben und sendet die erzielten Punkte mit Schwierigkeitsstufe und benötigter Zeit an das Lernsystem bzw. an den Übungsleiter. Näheres zum Thema Ergebnisübermittlung siehe in Kapitel 5 „Implementierung“.

## 2.2 Content und Content-Entwicklung

Unter Content, aus dem Englischen wörtlich: 'Inhalt', versteht man die Inhaltsformen für E-Learning, die man benötigt, um die technische E-Learning-Basis mit Informationen auszustatten, also z.B. Textdokumente wie Nachschlagewerke und Linksammlungen, Bilddokumente und Tondokumente.<sup>4</sup>

Die Content-Entwicklung umfasst alle Tätigkeiten, die erforderlich sind, um Content zu sammeln, aufzubereiten und darzustellen. Die eigentlichen Lerninhalte werden somit erstellt. Die Content-Entwicklung umfasst verschiedene Schritte und Phasen. Am Anfang, nach der Definition der Zielgruppe und des Themas, wird festgelegt, ob der Content selbst erstellt, ob dieser als standardisiertes Produkt gekauft oder ob ein kompletter Kurs bezogen werden soll.

---

<sup>4</sup> Vgl. Bock, Petra (2001), pdf-Dokument, S. 50

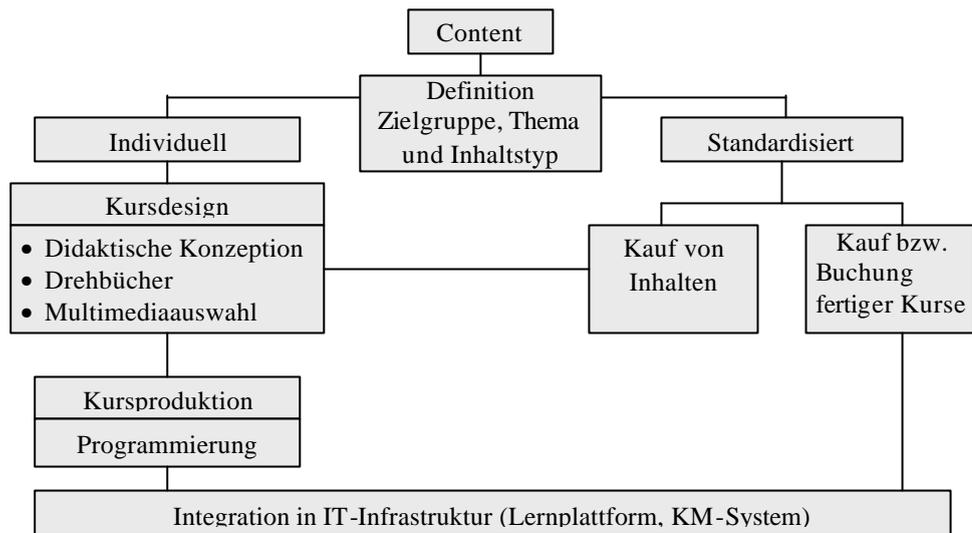


Abbildung 3: Planung und Bereitstellung von Content

Quelle: Bock, Petra (2001), pdf-Dokument, S. 51

Fällt die Entscheidung für die individuelle Lösung, muss wie bei einem Offline-Seminar ein Konzept für die Durchführung der Veranstaltung überlegt werden. Hinzu kommt noch die Programmierung, also die Produktion der Lernsoftware (siehe hierzu den linken Zweig in Abbildung 3).

Ein detaillierterer Ablaufplan zur Implementierung von Web-based Training sieht folgendermaßen aus:

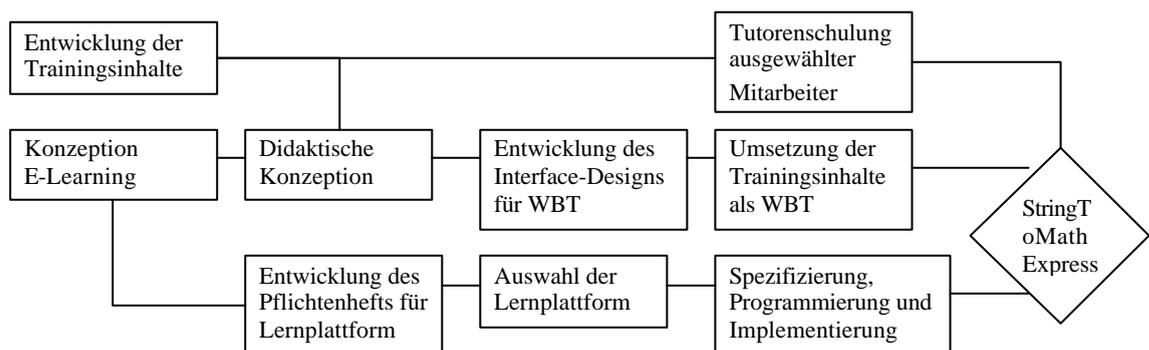


Abbildung 4: Implementierung von Web-based Training

Quelle: Zeitler, Franziska, E-Learning – multimediales Lernen online, pdf-Dokument, S. 2

Bei der Erstellung einer Lernseite entstehen Kosten von mindestens 100 € pro textbasierter Seite und ca. 5.000 € bei multimedialen Elementen.<sup>5</sup>

### 3 Signalverarbeitung

Ein Signal ist im Allgemeinen eine Zeitfunktion, die Informationen trägt. Neben eindimensionalen Signalen existieren zum Beispiel in der Bildverarbeitung auch zweidimensionale Signalfunktionen.<sup>6</sup> In dieser Arbeit wird auf die eindimensionalen Funktionen eingegangen, da diese zum Verständnis der Fouriertransformation ausreichend sind und der Student auf dieses Grundwissen bei Bedarf aufbauen kann.

Signale können übertragen, gespeichert, verarbeitet und ausgewertet werden, wobei sie für diesen Vorgang durch eine Orthogonaltransformation, also durch Entwicklung nach einem vollständigen Orthogonalsystem, in einer anderen Form dargestellt werden. Die Informationen des Signals sind nun in den Koeffizienten der Entwicklung gespeichert.

Ein geeignetes Orthogonalsystem ist das der Sinus- und Kosinusfunktionen. Diese beiden Funktionen sind auch besonders geeignet, da die Darstellung mittels dieser beiden eine Abbildung auf den Frequenzbereich, also einen Bereich mit physikalischer Bedeutung, ermöglicht. Auch der effektive Algorithmus der schnellen Fouriertransformation ist problemlos und sehr schnell bei der Signalabbildung auf den Frequenzbereich anzuwenden, was für die Faltung zweier Funktionen im Zeitbereich mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation und der Multiplikation im Frequenzbereich zu einem verkürzten Zeitaufwand führt.<sup>7</sup> Die Faltung zweier Funktionen ist zeitaufwendiger ( $O(n^2)$ ) als die Multiplikation zweier vorher Fouriertransformierten Signale und die Rückumwandlung des Produkts ( $O(n \log n)$ ).

Bei der digitalen Signalverarbeitung wird meistens davon ausgegangen, dass die zu verarbeitenden analogen Signale bandbegrenzt sind und mit hinreichend hoher Frequenz abgetastet werden. Dies hat die Herstellbarkeit bandbegrenzter Signale durch Filterung, die einfache Beziehung zwischen Signalspektrum und Diskreter Fouriertransformation

---

<sup>5</sup> Vgl. o.V., Lernen per Mausclick - E-Learning vor dem Durchbruch, HTML-Seite

<sup>6</sup> Vgl. Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985), S. 6

<sup>7</sup> Vgl. Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985), S. 7

der Abtastwerte und die Erhaltung der Bandbegrenzung bei Faltung und Korrelation, als Vorteil.<sup>8</sup>

#### 4 Mathematischer Hintergrund der Fouriertransformation

Jean-Baptiste-Joseph Fourier zeigte, dass sprunghafte Funktionen durch die Summe unendlich vieler Sinusfunktionen dargestellt werden können (siehe Fourierreihen Kapitel 4.2). Dieser Beweis ermöglicht die Beschreibung eines physikalischen Prozesses, der auch als eine zeitliche Änderung einer Größe  $h(t)$  dargestellt werden kann, durch eine Summe von Sinusfunktionen. Die Summe der Sinusfunktionen wird charakterisiert durch ihre Amplituden  $H(f)$ , also in Abhängigkeit von der Frequenz.<sup>9</sup>

Die Fouriertransformation wird hauptsächlich in der Signalverarbeitung eingesetzt, um Funktionen vom Zeitbereich in den Frequenzbereich umzuwandeln. Mit Hilfe der Fouriertransformation lässt sich die Berechnung einer Faltung vereinfachen. Um zwei Funktionen miteinander zu falten, werden zuerst beide Funktionen mit der Fouriertransformation in den Frequenzraum umgewandelt. Die beiden transformierten Funktionen können nun einfach mit geringerem Rechenaufwand multipliziert werden. Mit Hilfe der Rücktransformation wird das Produkt wieder in den Zeitraum umgeformt und man erhält das Ergebnis der Faltung.

Bevor aber weiter auf die Fouriertransformation eingegangen wird, werden die Grundlagen wie z. B. Fourierreihen und Symmetrie von Funktionen erklärt, um ein besseres Verständnis der Materie zu erreichen.

##### 4.1 Gerade und ungerade Funktion

Funktionen werden in gerade und ungerade Funktionen eingeteilt. Eine Funktion  $f(t)$  wird als gerade bezeichnet, wenn sie die Bedingung  $f(t) = f(-t)$  erfüllt. Grafisch be-

---

<sup>8</sup> Vgl. Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985), S. 154

<sup>9</sup> Vgl. Wortmann, Ulrich Georg, Zur Ursache der hemipelagischen schwarz/grün Zyklen im Apt/Alb der bayrischen Flyschzone, Die Fourier-Transformation, HTML-Seite

deutet dies, dass die Funktion an der y-Achse gespiegelt wird. Beispiele für eine gerade Funktion sind der Kosinus und eine Gerade parallel zur x-Achse (siehe Abbildung 5).

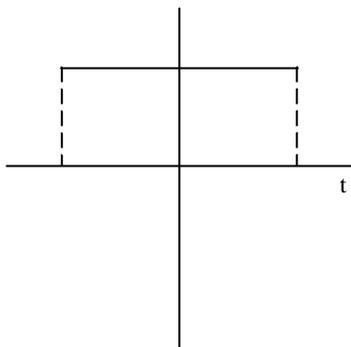


Abbildung 5: Gerade Funktion

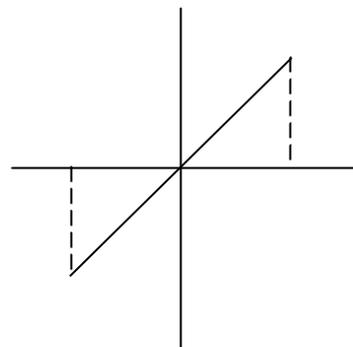


Abbildung 6: Ungerade Funktion

Eine ungerade Funktion besitzt folgende Eigenschaft:  $f(-t) = -f(t)$ , was einer Spiegelung durch den Nullpunkt, also einer Punktsymmetrie durch den Ursprung, entspricht (siehe Abbildung 6). Als Beispiel sei hier der Sinus und die Gerade durch den Ursprung erwähnt.

Eine Funktion kann entweder gerade, ungerade oder keins von beiden (z.B.  $f(t) = e^x$ ) sein. Jede Funktion lässt sich in einen geraden und ungeraden Anteil zerlegen.<sup>10</sup>

Bei der Berechnung der Fouriertransformation spielt die Einteilung in gerade und ungerade Funktionen eine wichtige Rolle und wird daher im Kapitel „Eigenschaften der Fouriertransformation“ (Kapitel 4.5) näher behandelt.

## 4.2 Fourierreihen

Die Fourierreihe ist definiert als

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (A_k \cos \mathbf{w}_k t + B_k \sin \mathbf{w}_k t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{w}_k = \frac{2\mathbf{p}k}{T} \quad \text{und} \quad B_0 = 0. \quad (1)$$

Die oben genannte Gleichung besagt, dass die unendliche Reihe mit der Funktion  $f(t)$  übereinstimmt und somit jede periodische Funktion sich als Überlagerung von Sinus- und Kosinus-Funktionen darstellen lässt. Die bis zu unendlich vielen Terme der Sinus- und Kosinus-Funktionen haben dabei geeignete Amplituden und nur ganz bestimmt

<sup>10</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991)

Frequenzen:

$$w_k = 0, \frac{2pk}{T}, \frac{4pk}{T}, \frac{6pk}{T}, \dots$$

Bei einer geraden Funktion ist  $B_k$  gleich 0, bei einer ungeraden Funktion ist  $A_k$  gleich 0. Außerdem gilt, dass eine Funktion ohne Unstetigkeiten in der 1. Ableitung und ohne Unstetigkeit „bandbreitenlimitiert“<sup>11</sup> ist, d.h. es genügt, eine endliche Zahl von Termen, um die Funktion darzustellen.

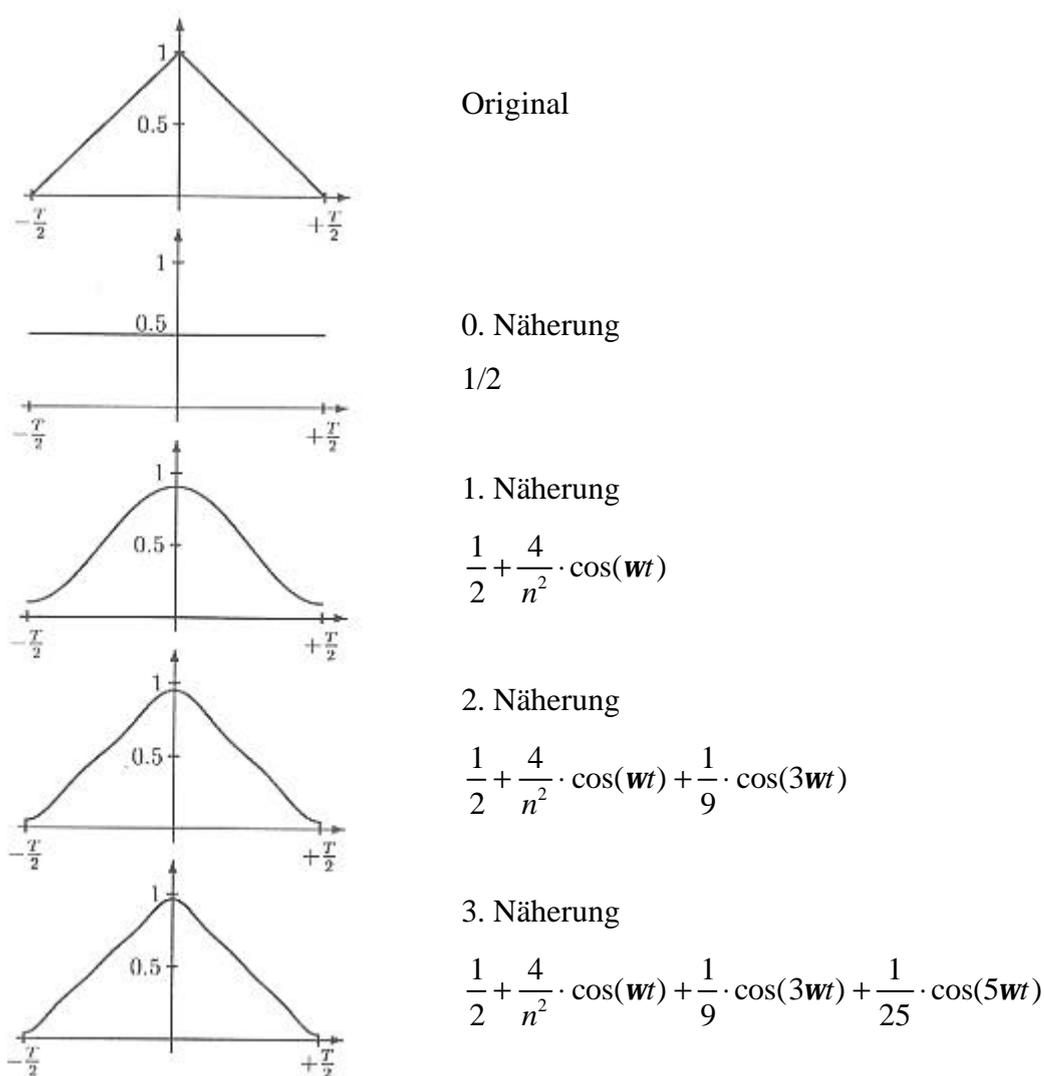


Abbildung 7: Dreiecksfunktion  $f(t)$  und sukzessive Näherung durch eine Fourierreihe mit mehr und mehr Reihengliedern

Quelle: Butz, Tilman, Fouriertransformation für Fußgänger (2000), S. 23

<sup>11</sup> Vgl. Butz, Tilman, Fouriertransformation für Fußgänger (2000)

Die Fouriertransformierte einer periodischen Funktion entspricht der Fourierreihenentwicklung dieser Funktion, d.h. die Menge der Fourier-Koeffizienten können als eine diskrete Fouriertransformierte der periodischen Zeitfunktion aufgefasst werden.<sup>12</sup>

### 4.3 Faltung

Die Faltung zweier Signale ist definiert durch:

$$g(t) \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot g(t-\tau) d\tau \quad (2)$$

Für die Existenz der Faltung ist es hinreichend, dass eines der beiden Signale endliche Energie besitzt, während das andere nur beschränkt sein muss. Die Faltung ist kommutativ und assoziativ.<sup>13</sup>

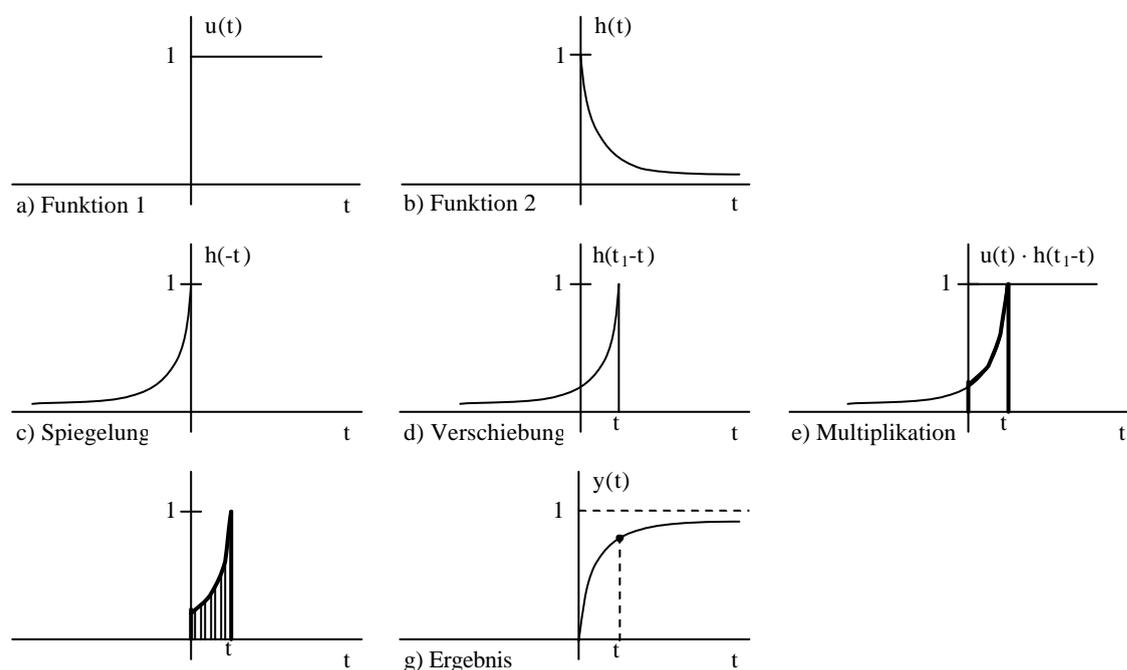


Abbildung 8: Geometrische Deutung der Faltung

Quelle: Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 64

<sup>12</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991)

<sup>13</sup> Vgl. Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985), S. 17

Zur Veranschaulichung der Faltung dient eine Skizze (Abbildung 8:), die die geometrische Deutung einer Faltung von zwei Funktionen darstellt. Als Erregung  $u(t)$  wird die Sprungfunktion (Abbildung 8: a), als Impulsantwort  $h(t)$  eine Exponentialfunktion (Abbildung 8: b) verwendet. Die geometrische Auswertung der Faltung kann in vier Schritten gegliedert werden: Spiegelung, Verschiebung, Multiplikation und Integration. Im ersten Schritt wird die Impulsantwort  $h(t)$  an der  $y$ -Achse gespiegelt (Abbildung 8:c). Diese umgefaltete Impulsantwort  $h(-t)$  wird um eine Zeit  $t_1$  verschoben (Abbildung 8: d). Die Zeit  $t_1$  ist dabei der Zeitpunkt, für den die Antwort berechnet werden soll  $y(t_1)$ . Im dritten Schritt wird die um  $t_1$  verschobene Funktion mit der Erregung multipliziert  $u(t)$  (Abbildung 8: e). Der vierte Schritt ist die Bildung des Integrals über  $t$  von dem Produkt (Abbildung 8: f). Das Ergebnis ist also die Fläche unter der Produktkurve an der Stelle  $t_1$  (Abbildung 8: g). Um das Ausgangssignal  $y(t)$  zu erreichen, wird die gespiegelte Impulsantwort diskret bei der diskreten Faltung bzw. kontinuierlich bei der kontinuierlichen Faltung von links nach rechts verschoben. Die Fläche unter der Produktkurve ändert sich also in Abhängigkeit von der Zeit  $t$ .<sup>14</sup>

Um eine Faltung zu berechnen, wird meistens die diskrete Faltung, die kommutativ, distributiv und assoziativ ist, angewendet. Diese ist definiert als die Summe

$$h_k = \{ f \otimes g \} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f_l \cdot g_{k-l} \quad (3)$$

Die Anzahl der Werte  $N$  für die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$  müssen gleich sein. Dies erreicht man, in dem man die kürzere der beiden Zahlenfolgen  $\underline{f}$  und  $\underline{g}$  mit Nullen auffüllt. Der Normierungsfaktor  $1/N$  ist notwendig, um die aufsummierten Produkte gleich zu gewichten und somit eine unveränderte Funktion zu erreichen, wenn eine Funktion

mit einer „1-Funktion“  $f_i = \begin{cases} 1 & i = 0 \\ 0 & i \neq 0 \end{cases}$  gefaltet wird.

---

<sup>14</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 63-64

#### 4.4 Kontinuierliche Fouriertransformation

Die Fouriertransformation ermöglicht das Wechseln zwischen Zeit- und Frequenzdarstellung.

Die folgende Formel stellt die Grundgleichung der Fouriertransformation dar. Mit dieser Gleichung kann man ein Signal im Zeitbereich in den Frequenzbereich transformieren.

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{2\pi i f t} dt \qquad h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f)e^{-2\pi i f t} df \qquad (4)$$

Eine weitere Darstellungsmöglichkeit von der Fouriertransformation und ihrer Rücktransformation ist durch Verwendung der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  möglich.

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \qquad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t} d\omega \qquad (5)$$

Die absolute Integrierbarkeit ist eine hinreichende (aber nicht notwendige) Existenzbedingung der Fouriertransformation.

Eine weitere Darstellung der harmonischen Exponentiellen lautet:

$$e^{-i\omega_0 t} = e^{i2\pi f t} = \cos(2\pi f t) + i \sin(2\pi f t) \qquad (6)$$

Anhand der Formel 6 kann der imaginäre und reelle Anteil der Fouriertransformation (Formel 4 und Formel 5) verdeutlicht werden.

#### 4.5 Eigenschaften der Fouriertransformation

In der folgenden Tabelle sind die Eigenschaften der Fouriertransformation noch einmal zusammengefasst:

Eigenschaft	Zeitbereich	Frequenzbereich
Linearität	$a \cdot g(t) + b \cdot h(t)$	$a \cdot G(\omega) + b \cdot H(\omega)$
	Aus den beiden Funktionen $g(t)$ und $h(t)$ wird eine Summe $g(t)+h(t)$ gebildet. Die Fouriertransformation dieser Summe ist die Summe der einzelnen fouriertransformierten Funktionen.	

1. Verschiebungssatz	$f(t - a)$	$F(\omega)e^{-i\omega a}$	
	Eine Verschiebung im Zeitbereich bewirkt eine Modulation im Frequenzbereich.		
2. Verschiebungssatz	$f(t)e^{-i\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$	
	Eine Verschiebung im Frequenzbereich bewirkt eine Modulation in der Zeitdomäne.		
Skalierungssatz	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$	für $a \neq 0$
	Der Skalierungssatz besagt, dass eine Streckung der Zeitachse eine Stauchung der Frequenzachse bewirkt.		
Faltung im Zeitbereich	$g(t) \otimes h(t)$	$G(\omega) \cdot H(\omega)$	
	Werden zwei Funktionen im Zeitbereich gefaltet, ist dies im Frequenzbereich ein Produkt der Fouriertransformierten.		
Faltung im Frequenzbereich	$g(t) \cdot h(t)$	$\frac{1}{2\pi} (G(\omega) \otimes H(\omega))$	
	Werden zwei Funktionen im Zeitbereich multipliziert, ist dies im Frequenzbereich eine Faltung der Fouriertransformierten.		

Tabelle 4: Eigenschaften der Fouriertransformation

Quelle: Hartmut Schröder, Mehrdimensionale Signalverarbeitung (1998), S. 13

## 5 Implementierung

Das vorliegende Java-basierte Übungssystem behandelt das Thema „Fouriertransformation“. Es prüft ab, ob der Student einfache Funktionen fouriertransformieren beherrscht und ermöglicht ihm, sich anschaulich in das Thema einzuarbeiten.

In den folgenden Unterkapiteln werden der Aufbau des Applets, getrennt in Architektur- und Instruktionsdesign, und die Auswahl der Funktionen und deren Kombinationsmöglichkeiten näher beschrieben.

## 5.1 Architekturdesign

Das Übungsapplet besteht aus zwei Teilen, dem ‚exercise‘- und dem ‚examples‘-Bereich. Im Aufgabenteil soll der Student vorgegebene Aufgaben lösen und sein Ergebnis an den Übungsleiter übermitteln. Zum anderen besteht für ihn die Möglichkeit, sich verschiedene Funktionen und deren Fouriertransformierte anzuschauen. Der Student kann sich entscheiden, ob er zuerst eine Aufgabe lösen möchte oder ob er im Übungsbereich sich die Funktionen im Zeit- und Frequenzbereich anschauen möchte.

Die wichtigsten Klassen im Java-Applet sind die fünf Funktionsklassen `cosinusFunction`, `rectangularimpulseFunction`, `rampFunction`, `diracFunction` und `stepFunction` sowie die drei Operatoren Klassen `plusFunction`, `multiplyFunction` und `convolutionFunction`, die alle von der Klasse ‚functions‘ erben. Diese Klassen liefern alle Informationen, die man zum Zeichnen der jeweiligen Funktion im Zeit- und Frequenzbereich benötigt. Im Falle der Rechteckfunktion wurde deren Transformierte, die Sinc-Funktion, als Klasse implementiert, da somit beide Funktionen als Funktion im Zeitbereich als auch im Frequenzbereich verwendet werden können. Dieses Phänomen ist darin begründet, dass die Transformierte der Transformierten wieder die Ausgangsfunktion ist.

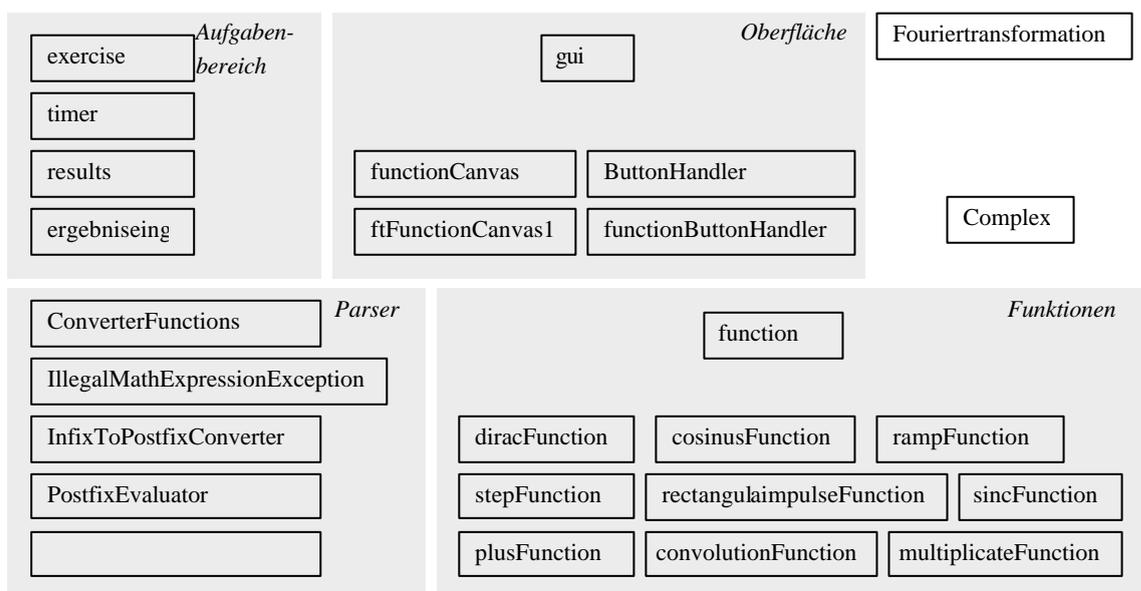


Abbildung 9: Verwendete Klassen

### 5.1.1. Aufgabenbereich

Im Aufgabenbereich soll der Student vorgegebene Aufgaben lösen. Dazu wird nach dem Drücken des Startbuttons eine Übungsaufgabe, die durch Zufall aus einem Pool von vorgegebenen Funktionen ausgewählt wird (Klasse „aufgaben“), eingeblendet. Die Übungsaufgabe besteht aus ein oder zwei Funktionen, die erst jetzt erzeugt werden. Außerdem werden die Variablen (das sind dieselben Variablen, die man auch im Übungsbereich eingeben kann) an die beteiligten Funktionen übergeben. Nun kann die Funktion der Übungsaufgaben grafisch (Klasse „functionCanvas“) ausgegeben werden. Weiterhin wird der Timer (Klasse „timer“) gestartet.

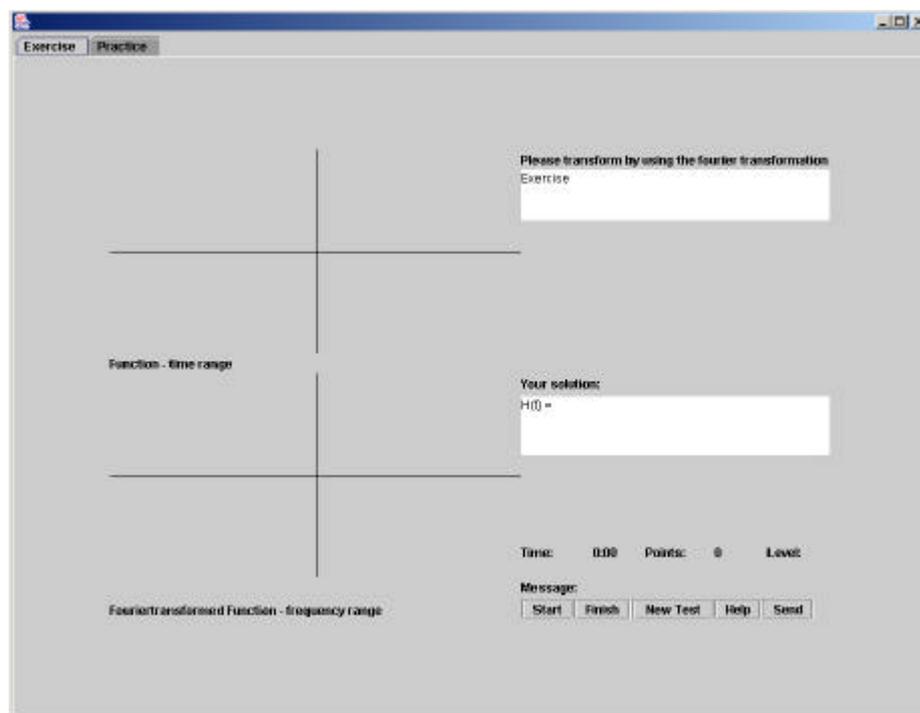


Abbildung 10: Aufgabenbereich

Durch Drücken des Buttons Finish wird die Musterlösung gezeichnet (Klasse „ftFunctionCanvas1“). Die Musterlösung, also die Fouriertransformierte Funktion, wird zu dem Zeitpunkt nicht mit Hilfe einer Fouriertransformation berechnet, sondern ist als Ausgabemethode der Fouriertransformierten Funktion zu den jeweiligen Funktionen im Zeitbereich gespeichert und kann somit einfach ausgegeben werden. Die Lösung des Studenten wird punktweise, also grafisch, mit der Musterlösung verglichen,

und es erfolgt eine Online-Übermittlung der erhaltenen Punkte, der Schwierigkeitsstufe und der benötigten Zeit an den Übungsleiter.

### 5.1.2. Bereich zum Üben

Im Übungsbereich steht das Ausprobieren im Vordergrund. Der Student hat die Möglichkeit, verschiedene Funktionen zu kombinieren. Dabei laufen im Hintergrund verschiedene Methoden ab.

Beim Klicken eines Funktionsbuttons, z.B. `cos` für die Kosinusfunktion, wird ein neues Objekt der jeweiligen Funktionsklasse z.B. „`cosinusFunction`“ erzeugt. Dieses Objekt schreibt ihre Variablen, die die Studenten ändern können, und die Formel auf die Oberfläche. Weiterhin werden bestimmte Buttons aktiviert und andere Buttons deaktiviert, um dem Studenten die nächsten Handlungsmöglichkeiten aufzuzeigen. Wählt er nun einen Operatorenbutton aus, hat er damit die Möglichkeit, zwei Funktionen miteinander zu verknüpfen.

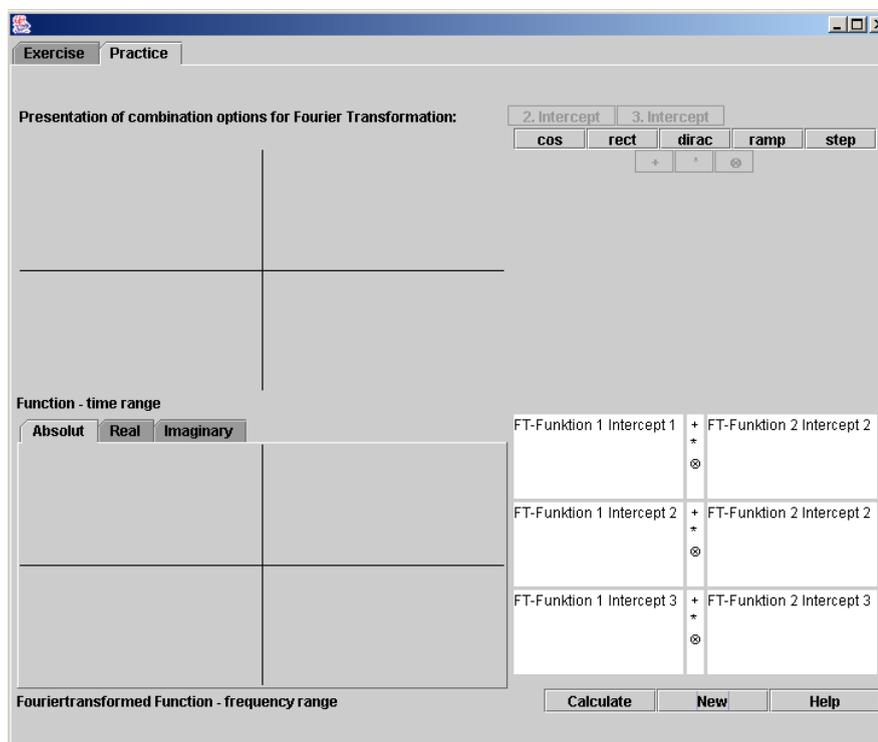


Abbildung 11: Übungsbereich

Beim Drücken des Berechnen-Buttons wird nun die Funktion im Zeit- und im Frequenzbereich gezeichnet. Dabei durchlaufen die einzelnen Zeichenflächen die  $x$ -Werte in

einem bestimmten Bereich und rufen die jeweilige Methoden der Funktion mit der Übergabe des  $x$ -Wertes auf, die dann den zum  $x$ -Wert gehörigen  $y$ -Wert zurückliefern. Liegt eine Verknüpfung von Funktionen vor, wird diese Funktion von den Zeichenflächen aufgerufen. Diese wiederum berechnet die  $y$ -Werte durch Aufruf der beiden beteiligten Funktionen und gibt diesen Wert dann an die aufrufende Zeichenfläche zurück. Die Zeichenflächen zeichnen eine Linie zwischen dem alten  $(x_0, y_0)$  und dem Neuberechneten Punkt  $(x_1, y_1)$ . Ausnahme stellt der Dirac-Impuls dar, bei dem eine Linie zwischen den Neuberechneten Werten  $(x_1, y_1)$  und dem Punkt vom neuem  $x$ -Wert  $x_1$  und dem vorherigem  $y$ -Wert  $y_0$  gezogen wird. Dies bewirkt, dass eine gerade Linie nach oben gezeichnet wird und nicht eine Linie, die in der Mitte einen Pixel nach rechts verschoben wird. Analog dazu erfolgt beim nächsten berechneten Punkt  $(x_2, y_2)$  eine Linienzeichnung vom altem  $x$ -Wert  $x_1$  und dem neuem  $y$ -Wert  $y_2$  zu diesem Neuberechneten  $(x_2, y_2)$ . Durch das Setzen eines Boolean-Wertes (`yIsDirac`) weiß die jeweilige Canvas, ob sie die Zeichenregel für Dirac-Impulse verwenden muss oder nicht.

## 5.2 Instruktionsdesign

Bei der Erstellung des Programms wurden verschiedene Aspekte des Lernens berücksichtigt. Im „Examples“-Bereich kann der Student selbstständig Funktionen zusammenstellen und somit eigenständig über das Thema lernen. Im zweiten Bereich wird das Gelernte im Sinne einer Reflexion abgefragt und somit das Lernen gesteuert.

### 5.2.1. Aufgabenbereich

Nachdem der Student im Aufgabenbereich auf den Start-Button gedrückt hat, bekommt er eine Funktion sowohl als Formel als auch grafisch angezeigt, dessen Fouriertransformierte er in ein Feld als seine Lösung eingeben soll. Wenn er mit der Eingabe fertig ist (Finish), wird die Musterlösung grafisch und als Formel angezeigt. Die Lösung des Studenten wird eingelesen und unter bestimmten Bedingungen grafisch ebenfalls ausgegeben.

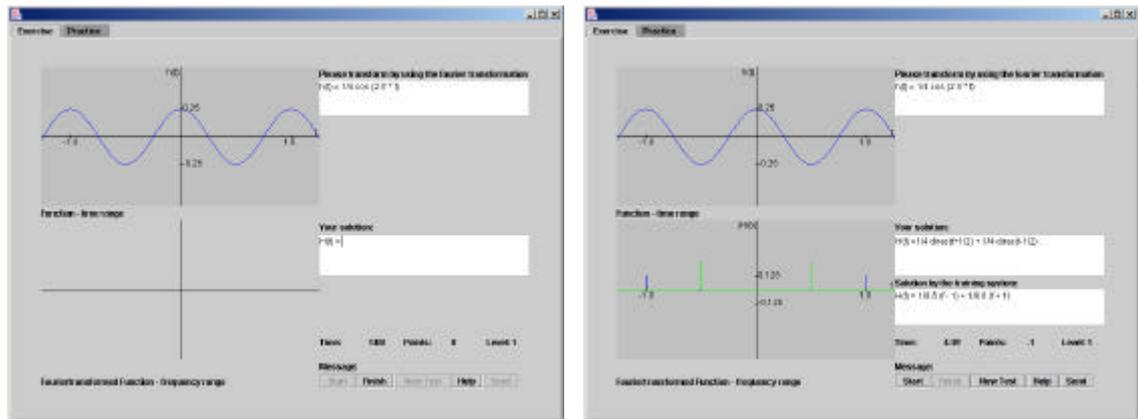


Abbildung 12: Grafische Oberfläche des Aufgabenbereichs vor und nach der Lösungsanzeige

### 5.2.2. Bereich zum Üben

Auf diesem Panel kann der Student verschiedene Funktionen auswählen und je nach ausgewählter Funktion verschiedene Parameter eingeben. Ebenfalls ist eine Verknüpfung über Addition, Multiplikation oder Faltung zweier Funktionen möglich. Wird der Calculate-Button gedrückt, wird die Funktion im Zeitbereich gezeichnet. Zusätzlich erfolgt eine Darstellung der Formel der fouriertransformierten Funktion und die grafische Ausgabe dieser Funktion als Betrag, deren reeller Teil und deren imaginärer Teil im Frequenzbereich.

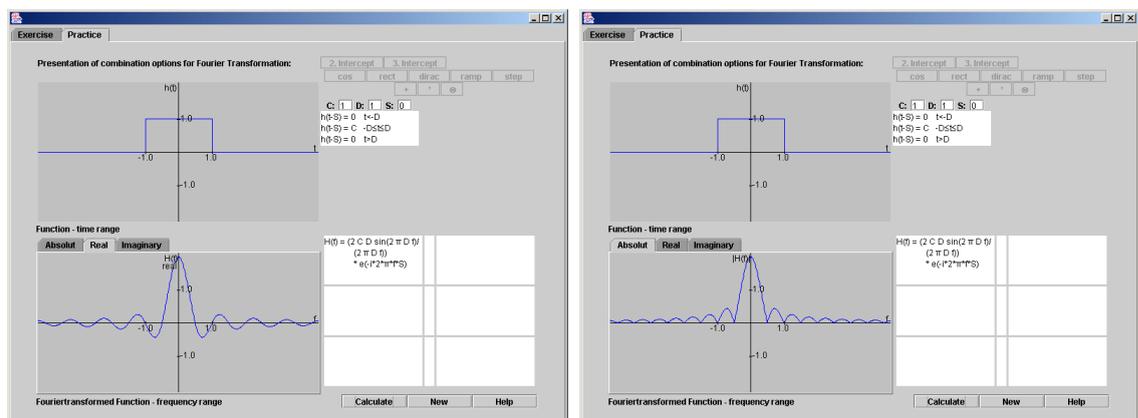


Abbildung 13: Grafische Oberfläche des Übungsbereichs mit einer Funktion dargestellt im reellen Bereich und mit Betrag

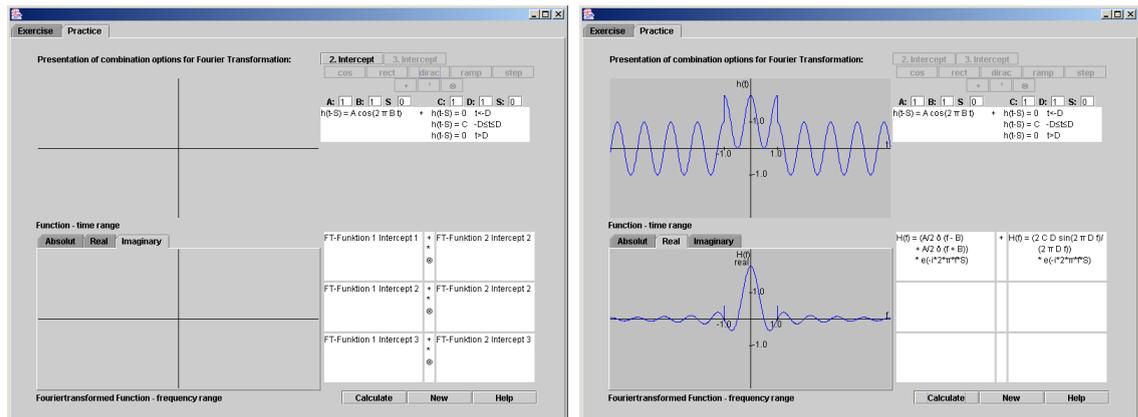


Abbildung 14: Grafische Oberfläche des Übungsbereichs mit zwei Funktionen vor und nach der Berechnung

Beispielhaft wird hier die Zusammensetzung der Dreiecksfunktion dargestellt. Als erstes wählt der Anwender die Rampenfunktion durch einen Klick auf den Button ramp aus. Weiterhin wählt er die Funktionsparameter so, dass eine Rampe mit der Steigung eins von  $t = -1$  bis  $0$  entsteht, das heißt der Shiftparameter  $S$  wird auf  $-1$  gesetzt,  $H$  und  $I$  behalten die Standardwerte von  $1$  (Definition der Formel mit seinen Parameter siehe Tabelle 5). Bevor nun die zweite Hälfte der Dreiecksfunktion zusammengestellt werden kann, muss der Wertebereich für die erste Funktion festgelegt werden. Dies geschieht dadurch, dass der Button „2. Intercept“ gedrückt wird und die Grenze  $N$  auf Null gesetzt wird. Den abfallenden Bereich der Dreiecksfunktion wird nun durch Addition einer Rampenfunktion mit der Steigung  $-1$  mit einer Rechteckfunktion im Bereich  $t = 0$  bis  $1$  erzeugt. Die Parameter der Rechteckfunktion müssen hierfür folgendermaßen gesetzt werden:  $C = 1$  (Höhe),  $D = 0.5$  (Bereich, in dem die Funktion den Wert  $C$  annimmt:  $-D = t = D$ ) und  $S = 0.5$  (Wert, um den die Funktion nach rechts verschoben wird).

### 5.3 Verwendete Funktionen

Bei der Auswahl der Funktionen sind Standardfunktionen aus der Digitaltechnik verwendet. Durch Zusammensetzen der verschiedenen Funktionen mit Hilfe der Operatoren Plus, Multiplikation und Faltung lassen sich die meisten Situationen nachbilden.

Die folgende Tabelle zeigt die im Übungsapplet verwendeten Funktionen im Zeitbereich und die dazugehörige Fouriertransformierte Funktion:

	Zeitbereich	Frequenzbereich
<b>Rechteckfunktion</b>	$h(t) = \begin{cases} A &  t  \leq T_0 \\ 0 &  t  > T_0 \end{cases}$	$H(f) = A \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{p f}$
<b>Dirac-Stoßfolge</b>	$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(t - nT)$	$H(f) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(f - \frac{n}{T})$
<b>Kosinusfunktion</b>	$h(t) = A \cos(2\pi f_0 t)$	$H(f) = \frac{A}{2} \mathbf{d}(f - f_0) + \frac{A}{2} \mathbf{d}(f + f_0)$
<b>Rampenfunktion</b>	$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I * t & 0 < t \leq H \\ 0 & t > H \end{cases}$	$H(f) = -\frac{I}{4f^2 p^2} (1 - e^{2H p f i} + 2H p f i e^{2H p f i})$
<b>Sprungfunktion</b>	$h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$	$H(w) = \frac{1}{i w} + p \mathbf{d}(w)$

Tabelle 5: Transformationspaare

### 5.3.1. Kosinusfunktion

Der Kosinus ist eine gerade Funktion und stellt ein zeitkontinuierliches Signal dar. Durch Verschiebung des Kosinus um  $-\frac{1}{2}p$ , kann der Student den Sinus erhalten, der eine ungerade und zeitkontinuierliche Funktion ist.

Der transformierte Kosinus besteht aus zwei Dirac-Impulsen, die halb so hoch sind wie der Faktor vor dem Kosinus und links und rechts vom Nullpunkt liegen.

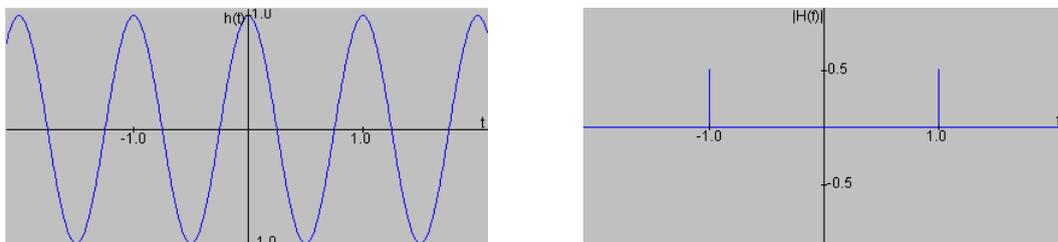


Abbildung 15: Kosinusfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte

### 5.3.2. Diracimpulsfolge

In der Systemtheorie stellt der Dirac-Impuls  $\mathbf{d}(t)$  eine wichtige Funktion dar und ist aus mathematischer Sicht keine Funktion, sondern eine „verallgemeinerte Funktion oder Distribution“<sup>15</sup>  $g(t)$ , das heißt es handelt sich um eine Vorschrift, die einer beliebigen Testfunktion  $\mathbf{j}(t)$  eine Zahl  $Z$  zuordnet.<sup>16</sup>

$$\{g(t), \mathbf{j}(t)\} \rightarrow Z$$

Zur Vereinfachung wird der Dirac oft auch als folgende Funktion dargestellt:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & |t| > a \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad \mathbf{d}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & |t| > a \\ \frac{t}{2a} & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

In dieser Form wurde der Dirac-Impuls auch im vorliegenden Applet implementiert. Da es sich im Applet um eine Dirac-Impulsfolge, also der Dirac-Impuls in regelmäßigen Abständen mit dem Gewicht 1, muss bei der Abtastung aufgepasst werden. Um den Dirac-Impuls beim Abtasten der x-Achse zu messen, wird ein größerer Bereich genau in der Größe der Abtastungsschritte rechts und links auf der x-Achse gemessen.

Die Fouriertransformation einer Dirac-Impulsfolge führt wiederum zu einer Dirac-Impulsfolge, deren Höhe  $1/T$  ist und deren Periode von  $t-nT$  zu  $f-n/T$  wechselt.

Die Dirac-Impulsfolge wird für den Übergang vom kontinuierlichen zum diskreten System und vom Fourier-Integral zur Fourierreihe verwendet. Sie stellt die Verbindung zwischen der Theorie der kontinuierlichen und der Theorie der diskreten Systeme dar.<sup>17</sup>

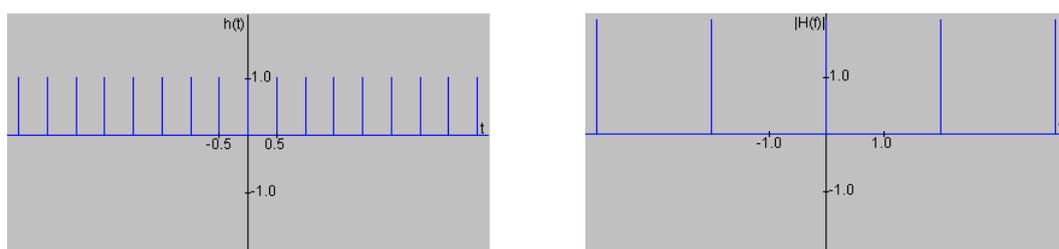


Abbildung 16: Diracimpulsfolge im Zeitbereich und ihre Transformierte

<sup>15</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 6

<sup>16</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 333

<sup>17</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 189

### 5.3.3. Rechteckimpuls

Der Rechteckimpuls ist der Idealfall von einem An- und Ausschalten eines Systems, auch als Schaltvorgang endlicher Dauer bezeichnet. In der Realität ist ein langsames Ansteigen von 0 auf den Signalwert zu beobachten.

Der Fouriertransformierte Rechteckimpuls wird als Sinc-Funktion bezeichnet. Bei der Bildung der Umkehrformel der Sinc-Funktion stellt sich heraus, dass die Funktion an der Stelle  $T_0$  auf das arithmetische Mittel von  $\frac{1}{2}$  führt.

$$h(t) = \begin{cases} A & |t| \leq T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad \circ \bullet \quad H(f) = A \frac{\sin(2\pi T_0 f)}{pf} \quad \bullet \circ \quad h(t) = \begin{cases} A & |t| < T_0 \\ A/2 & t = T_0 \\ 0 & |t| > T_0 \end{cases} \quad (8)$$

Dies liegt daran, dass eine nichtstetige Signalfunktion eine Fouriertransformierte besitzt, die ebenfalls nicht integrierbar ist.<sup>18</sup>

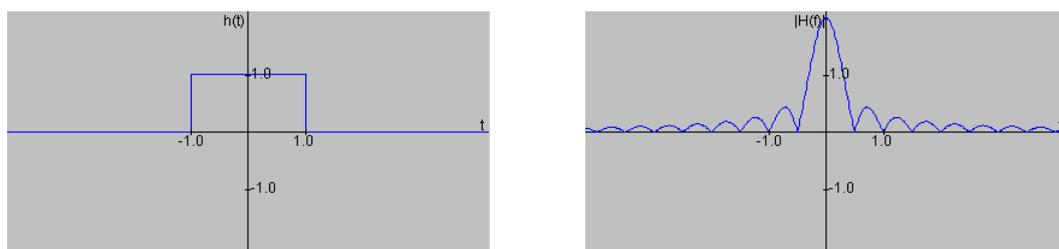


Abbildung 17: Rechteckimpuls im Zeitbereich und ihre Transformierte

### 5.3.4. Rampenfunktion

Ein langsam, gleichmäßig ansteigendes Signal wird Rampe genannt. Im Applet fällt die Rampe bei Ihrem Höhepunkt wieder sofort auf Null. Durch Anreihen einer Sprungfunktion kann man den normalen Verlauf eines Signals, das langsam von Null auf den Endwert eines Signals ansteigt und dort verharrt, nachbilden.

Ebenfalls ist durch Kombination zweier Rampen, wobei die eine Funktion eine positive Steigung die andere eine negative Steigung hat, die Standardfunktion Dreieckfunktion darstellbar.

<sup>18</sup> Vgl. Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985), S. 15

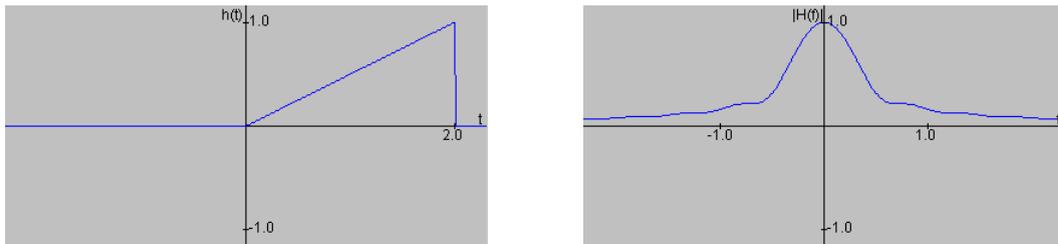


Abbildung 18: Rampenfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte

### 5.3.5. Sprungfunktion

Auch die Sprungfunktion  $e(t)$  kann als Vorschrift aufgefasst werden. Sie ordnet einer Testfunktion  $j(t)$  eine Zahl  $Z$  zu, die so groß ist wie die Fläche unter der Kurve von Null bis Unendlich<sup>19</sup>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e(t)j(t)dt = Z = \int_{-\infty}^{\infty} j(t)dt \quad (9)$$

Die Definition von einer Sprungfunktion lautet:  $h(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

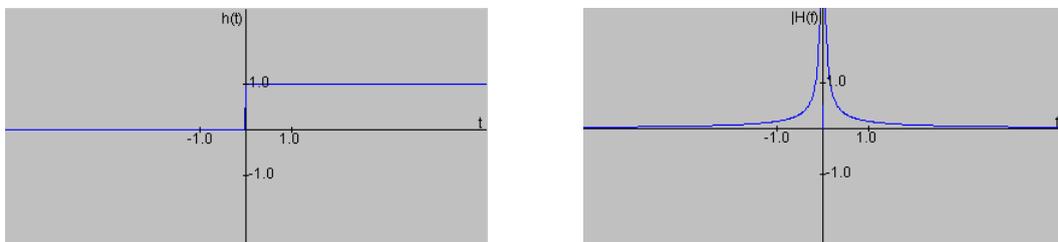


Abbildung 19: Sprungfunktion im Zeitbereich und ihre Transformierte

## 5.4 Kombination von Funktionen

Neben den ein-elementigen Funktionen sind auch verschiedene Kombinationen zweier Funktionen möglich. Weiterhin besteht die Möglichkeit, den Wertebereich in zwei oder drei Teile zu unterteilen. Dies ermöglicht das Nachbilden verschiedener in der Technik vorkommender Signale. Als Beispiel sei hier die ansteigende Rampe kombiniert mit einer abfallenden Rampe genannt, was zu einem Dreiecksimpuls führt.

<sup>19</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 334

### 5.4.1. Additionsfunktion

Wie im Kapitel 4.5 Linearitätstheorem beschrieben ist das Addieren von zwei Funktionen im Zeitbereich eine Addition im Frequenzbereich. Bei der Implementierung der PlusFunction werden beide beteiligten Funktionen aufgerufen und die y-Ergebnisse zu jedem x-Wert addiert. (sowohl im Zeit- als auch Frequenzbereich)

### 5.4.2. Multiplikationsfunktion

Bei der Multiplikation einer Funktion  $g(t)$  mit der Dirac-Impulsfolge erhält man an der Stelle von  $t$  des Dirac-Impulses den Funktionswert von  $g(t)$ . An den anderen Stellen ist der Dirac-Impuls Null, was zu einem Nullwert der Multiplikation führt. Als Ergebnis erhält man somit eine periodische Dirac-Impulsfolge an den Stellen  $nT$  mit unterschiedlichen Gewichten  $g(nT)$ ;  $n$  stellt alle ganzzahligen Werte dar.

Die Multiplikation mit einer Dirac-Impulsfolge wird auch als Abtastung der Funktion  $g(t)$  im Tastabstand  $T$  bezeichnet.<sup>20</sup>

### 5.4.3. Faltungsfunktion

Durch Faltung einer nicht periodischen Funktion  $f(t)$  mit einer Dirac-Impulsfolge kommt es zu einer periodischen Überlagerung der Funktion  $f(t)$  mit der Periode  $T$ . Ist der von Null verschiedene Bereich der endlichen Funktion kleiner als die Periode  $T$  der Dirac-Impulsfolge, dann entsteht eine periodische Fortsetzung von  $f(t)$ . Andernfalls führt es zu einer Überlappung der periodischen verschobenen Funktionen  $f(t-nT)$ .<sup>21</sup>

### 5.4.4. Wertebereiche

Um verschiedene Signale nachbilden zu können, hat der Anwender die Möglichkeit bis zu drei Wertebereiche zu definieren. Hierzu wählt er zuerst die Funktion für den ersten

---

<sup>20</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 188 f.

<sup>21</sup> Vgl. Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991), S. 187

Wertebereich aus. Nach dem Drücken des Buttons „2. Intercept“ kann die Grenze, die standardmäßig auf Null ( $t = 0$ ) liegt, geändert und die nächste Funktion für diesen Bereich ausgewählt werden. Analog kann noch ein dritter Wertebereich eingefügt werden.

Als Beispiel soll hier die Dreiecksfunktion genannt werden, die bereits im Kapitel 5.1.2 Bereich zum Üben vorgestellt wurde.

## 5.5 Aufgabenauswahl

Bei der Auswahl der Funktionen wurde auf den Schwierigkeitsfaktor und dem Zeitaufwand, den ein Student zur Lösung der Fouriertransformation aufwenden muss, geachtet. Die Aufgabenauswahl erfolgt aus den Funktionen, die auch im Übungsbereich auswählbar sind. Diese Funktionen sind die Standardfunktionen in der Signaltechnik und in der Multimediatechnik.

Die einfachste Schwierigkeitsstufe, sind gerade Funktionen, die nicht aus mehreren Funktionen zusammengesetzt sind, zum Beispiel eine einfache Kosinusfunktion oder ein Rechteckimpuls. Die Schwierigkeitsstufe wird bei ungeraden und zusammengesetzten Funktionen erhöht. Dabei erhalten Additionsfunktionen noch eine einfachere Stufe als Faltungen und Multiplikationen.

Für den Studenten wirken Funktionen mit vielen Termen wesentlich komplexer und schwieriger, als kurze Formeln. Aus diesem Grund sind die Funktionen meistens auf zwei oder drei Terme begrenzt, um nicht die Komplexität zu erhöhen.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit hat beispielhaft gezeigt, dass Computer Based Learning auf mathematische Probleme anwendbar ist. Mathematisch komplexe Themen können anhand von Grafiken und Beispielen erklärt und somit für Studenten verständlicher gemacht werden.

Verschiedene Aspekte des ELearning wurden bei der Erarbeitung berücksichtigt. Das in der Arbeit erstellte Applet beinhaltet sowohl die Aspekte des Selbstlernens (Examples-Bereich) wie auch des gesteuerten Lernens (Exercise-Bereich). Durch das

Übermitteln von Ergebnisse an einen Tutor kann der Student eine Leistungskontrolle erhalten.

Im Rahmen der Java-Programmierung wurden einige Klassen so entworfen, dass eine Wiederverwendung und eine Ergänzung des Programms, im Sinne der Objektorientierten Sprachen, möglich sind.

Eine wesentliche Erkenntnis ist, dass die Content-Entwicklung sehr zeitaufwendig ist. Sie gehört zu den Hauptkostentreibern des E-Learning. Für Unternehmen und Universitäten ist es daher äußerst wichtig, aufbereiteten Content günstig zu nutzen.

In der Zukunft werden E-Learning und Content-Entwicklung immer wichtiger werden. E-Learning wird derzeit hauptsächlich als Ergänzung zu Offline-Veranstaltungen und Studium gesehen. Aber auch als komplettes E-Learning-Studium, wie es im Projekt ULI angeboten wird, ist möglich. Aufgrund der hohen Entwicklungskosten wird dieser Bereich voraussichtlich nur langsam wachsen.

Sobald genügend Erfahrungen gesammelt sind, wird jedoch auch der Bereich des puren E-Learnings (ohne die Verbindung zu Präsenzveranstaltungen) schnell an Bedeutung gewinnen. Besonders eine Integration in das Wissensmanagement wird den Nutzen von E-Learning zusätzlich steigern.

**Literaturverzeichnis**

Achilles, Dietmar, Die Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung – Kontinuierliche und diskrete Verfahren der Praxis (1985): 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, ISBN 3-540-15721-2

Bock, Petra (2001), pdf-Dokument: Bock, Dr. Petra (Lead Analyst)/Spiller, Dorit (Mitarbeit), Wachstumsmarkt E-Learning: Anforderungen, Akteure und Perspektiven im deutschen Markt, BERLECON RESEARCH GmbH, Berlin, August 2001

Butz, Tilman, Fouriertransformation für Fußgänger (2000): B. G. Teubner Stuttgart – Leipzig, ISBN: 3-519-10202-1

Fliege, Norbert, Systemtheorie (1991): B. G. Teubner Stuttgart, Informationstechnik, ISBN: 3-519-06140-6

Lüke, Hans Dieter, Signalübertragung - Grundlagen der digitalen und analogen Nachrichtenübertragungssysteme (1988): 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, ISBN: 3540194355

Michel, Lutz P. et al. (2000), pdf-Dokument: Michel, Dr. Lutz P./Heddergott, Kai/Hoffmann, Hans-Jürgen, URL.: <http://www.mmb-michel.de/netzlernen2000.pdf>, Zukunftsperspektiven multimedialen Lernens in kleinen und mittleren Unternehmen, Ergebnisse einer Potenzialerhebung, Eine Untersuchung von MMB - Michel Medienforschung und Beratung, Essen, Januar 2000, abgerufen am 20.11.2002

o.V., Daten & Dokumentation Glossar, HTML-Seite: URL: <http://www.daten-dokumentation.de/infos/glossar1.html>, abgerufen am 30.4.2002

o.V., IBM E-Learning Services, HTML-Seite: URL: <http://www-5.ibm.com/de/learning/elearning/definition.html>, abgerufen am 30.4.2002

o.V., Lernen per Mausclick - E-Learning vor dem Durchbruch, HTML-Seite: URL: <http://www20.wissen.de/xt/default.do?MENUID=40%2C156%2C538%2C547&OCCURRENCEID=SL0012911165.SL0012909430.5000065.6>, abgerufen am 5.12.2002

Schröder, Hartmut, Mehrdimensionale Signalverarbeitung (1998): Band 1, Algorithmische Grundlagen für Bilder und Bildsequenzen, B. G. Teubner, Stuttgart, ISBN: 3-519-06196-1

Wortmann, Ulrich Georg Zur Ursache der hemipelagischen schwarz/grün Zyklen im Apt/Alb der bayrischen Flyschzone, Die Fourier-Transformation, html, <http://www.spoc.ethz.ch/uli/papers/diss/main-node23.html>, abgerufen am 15.10.2002

Zeitler, Franziska, E-Learning – multimediales Lernen online, pdf-Dokument: E-Learning – multimediales Lernen online, Flexibilität und Effizienzgewinne, Expert Team AG, Köln, HTML-Seite: URL: <http://www.pallas.com/d/news/publikationen/Praxisbe-a05.pdf>, abgerufen am 24.11.2002